Lehrbuch

der

Geometrie

für

technische Lehranstalten und Gymnasien

von

Heinrich Rose,

Doctor der Medicin, k. Rector der Kreis-Landwirthschafts- und Gewerbsschule und Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Nürnberg.

Erster Theil.

Die ebene Geometrie.

Zweite durchgesehene Auflage.

Mit 208 in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Nürnberg,

bei Riegel und Wießner.

1858.

Druck der U. E. Sebald'schen Officin in Nürnberg.

Vorwort zur ersten Auflage.

Die Ordnung, in welcher in dem vorliegenden Lehrbuche der Geometrie die einzelnen Lehren dieser Wissenschaft auf einander folgen, hat den wesentlichen Vortheil, daß die verwandten Sätze, die gleichsam eine Familie bilden, und welche hier gruppenweise neben einander hingestellt sind, von dem Anfänger leicht übersehen und in ihrem innern Zusammenhang aufgefaßt werden können. Hiebei erschien zweckmäßig die allgemeine Mathematik nicht eher in Anwendung zu bringen, bis die Hauptsätze der Geometrie auf rein synthetischem Wege vorgetragen waren, um der großen Förderung in Uebung und Entwicklung der denkenden und schließenden Geisteskraft, welche die Geometrie ihren Lehrlingen gewährt, nicht durch zu frühe Einmischung

eines mehr mechanischen und dem Schüler undurchsichtigen Verfahrens Abbruch zu thun. Um aber den aus der Anwendung der Algebra auf die Geometrie erwachsenden Nutzen eben so wenig entbehren zu lassen, wurde derselben ein eigener Abschnitt gewidmet. Am Ende einiger dieser Abschnitte, in welche das Buch zerfällt, wurde es für nützlich gehalten, Reihen von Uebungsaufgaben folgen zu lassen, welche ihre Lösung in der Anwendung der in den vorhergehenden Abschnitten abgehandelten Sätze finden und welche so wenig in einem Lehrbuche der Geometrie, wie die Uebungsbeispiele in einer Sprachlehre entbehrlich schienen. Die Aufgaben wurden so gewählt, daß der Schüler eine gewisse Ordnung in dem Gegebenen findet und dadurch leicht in den Stand gesetzt wird, sich selbst neue Aufgaben zu stellen. Viele von diesen Aufgaben sind vollständig gelöst und die Richtigkeit der Auflösung bewiesen, nur hie und da der Beweis zur Uebung übrig gelassen, die übrigen wurden dem Fleiße und Nachdenken des Lernenden zur selbständigen Lösung hingestellt. Die Forderung wissenschaftlicher Strenge wurde bei Ausarbeitung dieses Buches nie aus dem Auge verloren, eben so wenig aber auch die nothwendig zu nehmende Rück-

sicht auf den jugendlichen Kreis von Schülern, welchen es zum Lehrbuche dienen soll. In letzterer, so wie in der besondern Wichtigkeit, die der Inhalt der beiden ersten Abschnitte behauptet, möge die verhältnißmäßig größere Ausdehnung dieser ihre Erklärung und Rechtfertigung finden.

Nürnberg, im December 1839.

D. Bf.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Diese zweite Auflage kann neben der ersten ohne Hinderniß in den Schulen gebraucht werden, da nur wenige Verbesserungen und diese nur in den Beweisen einzelner Sätze vorkommen und die Paragraphenzahlen die nehmlichen geblieben sind. Daß in der neuen Auflage die Figuren in den Text eingedruckt sind, kann als ein Vorzug angesehen werden, weil dadurch der Gebrauch des Buches erleichtert und das während der Lehrstunden so störende Herausschlagen der Kupfertafeln vermieden wird.

Obgleich die Kupferplatten zu den Figuren noch in dem besten Zustande sich befinden, so haben die Herren Verleger es doch vorgezogen, um dem Buche die bequemere Einrichtung zu verschaffen, sämmtliche Figuren in Holzschnitten neu ausführen zu lassen, was hier erwähnt sein darf.

Nürnberg, Juli 1857.

D. Vf.

Inhalt.

Fünfter Abschnitt.

Sechster Abschnitt.

Einleitung.

1) Alle Dinge der äußern Erscheinungswelt existiren im Raume, in welchem dreierlei Richtungen oder sogenannte Dimensionen unterschieden werden, nämlich Länge, Breite und Höhe.

2) Der Raum, in seiner allgemeinen Unbestimmtheit gedacht, ist unendlich, unbegrenzt, aber überall beliebig begrenzbar; eben so werden die Dimensionen des Raumes als unendliche, unbegrenzte, aber überall beliebig begrenzbare gedacht.

3) Denkt man sich die drei Dimensionen zusammen als begrenzt, so entsteht ein allseitig begrenzter Raum, welchen wir Körper nennen.

4) Wird von dem unbegrenzten Raum eine Dimension, die Höhe, hinweggedacht, so erscheint die unbegrenzte Fläche, nämlich ein Ding, das unbegrenzt lang und breit ist, im Gegensatze zu der begrenzten Fläche, welche die begrenzte Länge und Breite ist und welche entsteht, wenn von dem Körper die Höhe hinweggedacht wird.

5) Von der unbegrenzten Fläche wieder eine Dimension, die Breite, hinweggedacht, erscheint die unbegrenzte Linie, nämlich ein Ding, das unbegrenzt lang ist, im Gegensatze zur begrenzten Linie, welche die begrenzte Länge ist und welche entsteht, wenn von der begrenzten Fläche die Breite hinweggedacht wird.

6) Die Grenze der Linie, d. h. der Ort, wo dieselbe aufhört, heißt aber Punkt.

7) Mithin hat der Körper drei, die Fläche zwei, die Linie eine, der Punkt aber keine Dimension.

8) Die Grenzen des Körpers sind also Flächen, die der Flächen sind Linien und die der Linien Punkte.

9) Geht man von der Betrachtung und Entwickelung obiger Raumbestimmungen rückwärts, so ergibt sich folgende Vorstellung. Bewegt sich im Raume ein Punkt nach irgend einer Richtung, so ist der Weg, den er beschreibt, eine Linie; bewegt sich aber diese Linie anders, als nach dieser Richtung, so ist der Weg, den diese Linie beschreibt, eine Fläche; bewegt sich endlich diese Fläche anders, als nach ihrer Lage, so ist der Weg, den diese Fläche beschreibt, ein Körper.

Anmerkung. Man hüte sich aber zu schließen, die Linie bestehe aus Punkten, die Fläche aus Linien, und der Körper aus Flächen.

10) Diese Bestimmungen des Raumes, Körper, Flächen und Linien heißen Raumgrößen. Mit der Betrachtung und Entwickelung der Verhältnisse dieser Raumgrößen beschäftigt sich die Wissenschaft, die wir hier vortragen und welche Geometrie genannt wird.

Die Geometrie aber ist nur einer der beiden Theile einer umfassenderen Wissenschaft, der reinen Mathematik, deren anderer Theil die Arithmetik ist und deren Anfangsgründe hier vorausgesetzt werden.

Anmerkung 1. Es ist wohl zu unterscheiden der geometrische Körper vom physikalischen, indem der geometrische Körper der ganz nur in seiner räumlichen Bestimmtheit betrachtete Körper ist, von dessen Eigenschaften und Merkmalen, als Schwere, Dichtigkeit, Undurchdringlichkeit und sonstigen Eigenschaften, wie sie die Physik betrachtet, hier gänzlich abstrahirt wird.

Anmerkung 2. Die oben (9) gegebene Vorstellung leitet auf die Art und Weise, wie sinnliche Bilder von Linien mittelst des Bleistifts und mit färbendem Stoffe gefüllter Federn ꝛc. auf Papier gemacht werden können. Diese gezogenen Linien und Punkte erreichen aber nie den rein geometrischen Begriff von ihnen; denn jede auch mit dem möglichsten Grade von Feinheit und

Schärfe gezogene Linie, oder jeder angedeutete Punkt in ihr, ist schon ein Körper und zwar ein physischer. Wir haben aber keine andern Mittel, unsere im Innern entstandenen Begriffe über den begrenzten Raum auf die Aussenwelt überzutragen oder bildliche Darstellungen von ihnen zu erzielen, wie sie zum Behuf des Lehrens und Lernens erforderlich sind.

Jede bildliche Darstellung des begrenzten Raumes nennen wir Figur und das Darstellen selbst das Zeichnen.

11) Die Art, auf welche die Geometrie — sowie überhaupt die Mathematik — ihre Lehren vorträgt, ist folgende:

Sie bestimmt erstlich den Begriff des zu erläuternden und entwickelnden geometrischen Gegenstandes und nennt diese Begriffsbestimmung, welche eine durchaus vollständige und umfassende zu sein hat, Sacherklärung (Definitio realis.)

Dieser Name unterscheidet sich von einem andern, der Worterklärung (Definitio nominalis), in der Art, daß letztere die Angabe einer für einen bestimmten geometrischen Begriff zu unabänderlichem Gebrauche festgesetzten Benennung ist. Der Kürze wegen indessen wird für beide Fälle der einfachere Ausdruck Erklärung gebraucht.

12) Die Geometrie hat es ferner mit Erkenntnissen zu thun, die so einfach und allgemein einleuchtend sind, daß sie nur ausgesprochen zu werden brauchen, um als wahr und gewiß zu erscheinen; indem sie nun solche in dieser Weise auch wirklich hinstellt, gebraucht sie für dieselben den Ausdruck: Grundsatz (Axioma).

13) Andere Fälle gibt es hingegen, wo der behauptete Satz keineswegs schon für sich so einleuchtend ist, um über allem Zweifel zu seyn, und deshalb einer förmlichen Beweisführung bedarf, um als wahr und gewiß zu erscheinen; ein solcher Satz wird Lehrsatz (Theorema) genannt.

Näher betrachtet wird in jedem Lehrsatze zuvörderst irgend ein bestimmter Fall gesetzt und sodann behauptet, daß in diesem irgend eine Bestimmtheit, ein Verhältniß enthal-

ten sey, welches aber, als wirklich darin enthalten, nicht unmittelbar in die Augen springt, so daß es die Sache des Beweises ist, auf eine einleuchtende Weise aufzuzeigen, daß jene Bestimmtheit, jenes Verhältniß wirklich darin enthalten sey — oder kurz ausgedrückt, es zerfällt der Lehrsatz in die Bedingung und Behauptung, und der Beweis besteht darin, den nothwendigen Zusammenhang der Behauptung mit der Bedingung zur klaren, unabweislichen Einsicht zu bringen.

Zu Hilfsmitteln solches Beweisens oder zu Beweisgründen dienen die vorausgeschickten Erklärungen, Grundsätze, oder bereits früher erwiesenen Sätze.

14) Arten des Beweises, wie sie den Umständen zufolge verschiedentlich gewählt werden, sind entweder directe oder indirecte, und zwar kann der directe Beweis wiederum auf verschiedene Art geführt werden, nämlich:

a) man geht entweder von der Bedingung aus und erweist von dieser aus die Wahrheit der Behauptung, was man den synthetischen Beweis nennt, oder

b) man geht von der Behauptung, als einer für wahr angenommenen, aus und geht beweisend auf die Bedingung zurück, was der analytische Beweis heißt.

Der indirecte Beweis aber besteht darin, daß man das Gegentheil der Behauptung annimmt und darthut, daß dieses mit der Bedingnng nicht übereinstimme; welche Art des Beweises man den apagogischen Beweis zu nennen pflegt.

Nicht selten ist jedoch der Fall, daß ein Theil des Beweises direct, der andere indirect, oder ein Theil synthetisch, der andere analytisch geführt werden muß.

15) Eine Umkehrung des Lehrsatzes tritt ein, wenn die Bedingung zur Behauptung und die Behauptung zur Bedingung gemacht wird.

16) Die Geometrie stellt ferner Sätze auf, in welchen irgend etwas zu bewerkstelligen verlangt wird; ist nun hier die Art der Bewerkstelligung und ihre Richtigkeit ohne weiteres für sich selbst einleuchtend, so nennt man den Satz eine Forderung (Postulatum); muß aber die Art der Bewerkstelligung gezeigt und die Richtigkeit des Verfahrens bewiesen werden, so heißt der Satz Aufgabe (Problema). Zu einer Aufgabe gehört ein Gegebenes und ein Gesuchtes. Die Belehrung über die Art, wie aus dem Gegebenen das Gesuchte zu finden sey, ist die Auflösung der Aufgabe; die hiezu nöthige Zeichnung nennt man die Construction; daß aber dieses ganze Verfahren ein richtiges gewesen, hat zuletzt der Beweis außer Zweifel zu setzen. Hier ist zu bemerken, daß unter geometrischer Construction nur eine solche Zeichnung verstanden wird, welche mit den bekannten Instrumenten, Zirkel und Lineal, mit Ausschluß aller übrigen zu Stande gebracht wird.

17) Ein Satz, der in einem andern enthalten ist oder aus demselben unmittelbar gefolgert werden kann und den man der Deutlichkeit und des Zusammenhangs wegen, als eigenen Satz aufstellt, heißt Zusatz (Corollarium).

18) Ein Satz, dessen Behauptung nicht im nothwendigen Zusammenhang mit den übrigen Sätzen der Wissenschaft steht, dessen Möglichkeit aber zugegeben werden muß, heißt willkührlicher Satz.

19) Was nicht zu den bisherigen Sätzen gehört, aber wohl verdient, mit vorgetragen zu werden, wird in der Anmerkung (Scholion) mitgetheilt.

20) Die allgemeinen Zeichen der Arithmetik, nämlich das Gleichheitszeichen (=), das Additionszeichen (+), das Subtractionszeichen (—), das Multiplicationszeichen (der Punkt oder ×), so wie das Divisionszeichen (: oder die Bruchform) gelten auch im ähnlichen Sinne in der Geometrie; eben so wird kleiner durch < und größer durch >, überhaupt kleiner oder größer durch ≶ bezeichnet.

Die übrigen Zeichen, die der Geometrie eigenthümlich sind, werden jedesmal nach den Erklärungen, in welchen der Begriff, den sie vorstellen, zum ersten Mal vorkommt, gegeben.

Anmerkung. (V. D. B.) heißt: vermöge der Bedingung.
(V. D. C.) heißt: vermöge der Construction.
(W. Z. E.) heißt: was zu erweisen.

21) Allgemeine Grundsätze, die die Mathematik aufstellt, und die in der Geometrie ihre Anwendung finden, sind folgende:

1) Jede Größe ist sich selbst gleich,

oder $A = A$.

2) Das Ganze ist größer als ein Theil desselben.

Ist $a + b + c + d = A$, so ist $A > a$ und auch $A > b$ u. s. w.

3) Das Ganze ist so groß, als alle seine Theile zusammengenommen.

4) Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie sich selbst gleich.

Ist $A = B$
und $A = C$

so ist auch $B = C$.

5) Gleiche Größen zu gleichen Größen addirt, gibt gleiche Summen.

Nämlich ist $A = B$ und $C = C$, so ist auch $A + C = B + C$.

6) Gleiche Größen von gleichen Größen subtrahirt, gibt gleiche Differenzen.

Nämlich ist $A = B$ und $C = C$, so ist auch $A - C = B - C$.

7) Gleiche Größen mit gleichen Größen multiplicirt, gibt gleiche Producte.

Nämlich ist $A = B$ und auch $C = C$, so ist auch $A . C = B . C$.

8) Gleiche Größen durch gleiche Größen dividirt, gibt gleiche Quotienten.

Nämlich ist $A = B$ und $C = C$, so ist auch $A : C = B : C$.

9) Ist eine von zwei gleichen Größen einer dritten ungleich, so ist auch die zweite der dritten ungleich, und

zwar ist die erste größer als die dritte, so ist auch die zweite größer als die dritte, und ist die erste kleiner als die dritte, so ist auch die zweite kleiner als die dritte und umgekehrt.

Ist $A=B$ und $A \gtrless C$, so ist auch $B \gtrless C$; ist nämlich $A<C$, so ist auch $B<C$ und ist $A>C$, so ist auch $B>C$ und umgekehrt.

10) Wird zu Gleichem Ungleiches addirt, so sind die Summen ungleich und zwar ist dies die größere Summe, zu der das Größere addirt und das die kleinere, zu der das Kleinere addirt worden ist.

Ist $A=B$ und $C \gtrless D$, so ist $A+C \gtrless B+D$, ist nämlich $C>D$, so ist auch $A+C>B+D$.

11) Wird von Gleichem Ungleiches subtrahirt, so sind die Differenzen ungleich und zwar wird dort die größere Differenz erscheinen, wo die kleinere Größe abgezogen wurde, und umgekehrt.

Ist $A=B$ und $C \gtrless D$, so ist $A-C \lessgtr B-D$, ist nämlich $C>D$, so ist $A-C<B-D$.

12) Wird Gleiches durch Ungleiches multiplicirt, so sind die Producte ungleich und zwar wird das größere Product durch den größeren Multiplicator erzeugt und umgekehrt.

Ist $A=B$, $C \gtrless D$, so ist $A.C \gtrless B.D$; ist nämlich $C>D$, so ist auch $A.C>B.D$.

13) Wird Gleiches durch Ungleiches dividirt, so sind die Quotienten ungleich, und zwar erzeugt der größere Divisor den kleinern Quotienten und umgekehrt.

Ist $A=B$ und $C \gtrless D$, so ist auch $A:C \lessgtr A:D$; ist nämlich $C>D$, so ist $A:C<B:D$.

14) Wenn von zwei gleichartigen Größen die eine weder größer noch kleiner ist, als die andere, so sind sie gleich.

Ist A nicht $>B$, noch $A<B$, so muß $A=B$ sein.

15) Wenn von zwei gleichartigen Größen die erste weder größer noch gleich der zweiten ist, so ist die erste kleiner als die zweite.

Ist A nicht $>$ B, noch A $=$ B, so muß A $<$ B seyn.

16) Wenn von zwei gleichartigen Größen die erste weder kleiner noch gleich der zweiten ist, so ist die erste größer als die zweite.

Ist weder A $<$ B, noch A $=$ B, so muß A $>$ B seyn.

17) Gleiche Größen können für gleiche Größen gesetzt (substituirt) werden.

Ist $A+B=C$ und ist $B=D$, so ist auch $A+D=C$.

22) Die Geometrie geht in ihrem Lehrvortrage von dem Einfachen zum Zusammengesetzten über und handelt zuerst von den Linien, sodann von den Flächen und endlich von den Körpern. Sie trägt diese Lehren in zwei Theilen vor, nämlich 1) die Lehre von den Linien und Flächen (ebene Geometrie, Planimetrie) und 2) die Lehre von den Körpern (körperliche Geometrie, Stereometrie).

23) Hinsichtlich des Inhaltes theilt sich auch die Geometrie in die niedere und höhere. Erstere betrachtet bloß Figuren, die von geraden Linien oder deren Grenzen von geraden Linien, mit Ausschluß einer einzigen krummen, letztere die bloß von krummen oder deren Grenzen von krummen Linien gebildet sind.

Ebene Geometrie.

Erster Abschnitt.

Gerade Linien, Winkel, Parallellinien, Arten der Figuren.

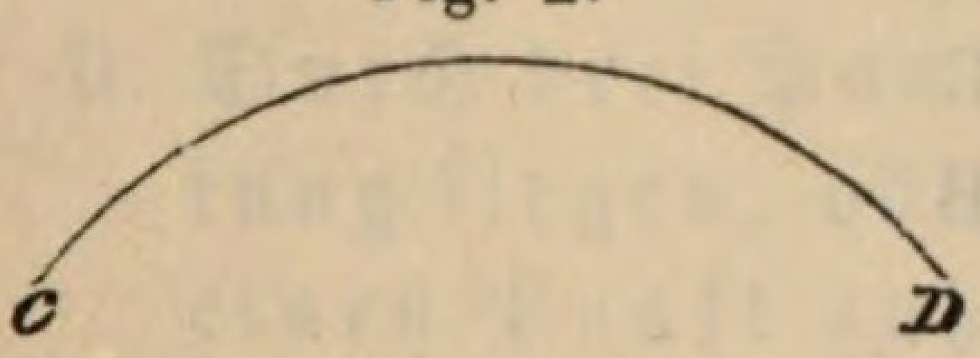
§. 1.

Fig. 1.



Erklärung. Eine Linie AB (Fig. 1.) heißt gerade, wenn alle Punkte in ihr in einer und derselben Richtung liegen, krumm aber, wie CD (Fig. 2.), wenn jeder Punkt in ihr mit seinem zunächstvorhergehenden und zunächstnachfolgenden in verschiedenen Richtungen liegt.

Fig. 2.



Zusatz 1. Die gerade Linie AB ist der kürzeste Weg zwischen den Punkten A und B; deshalb nennt man die gerade Linie auch die Entfernung (Abstand) zweier Punkte.

Zusatz 2. Durch zwei Punkte A und B ist die Richtung einer geraden Linie vollkommen bestimmt, oder durch zwei Punkte läßt sich nur eine einzige gerade Linie ziehen.

Zusatz 3. Haben zwei gerade Linien zwei Punkte gemeinschaftlich, so liegen sie nach einerlei Richtung und machen, wenn man sie sich ohne Ende verlängert denkt, nur eine einzige Gerade aus.

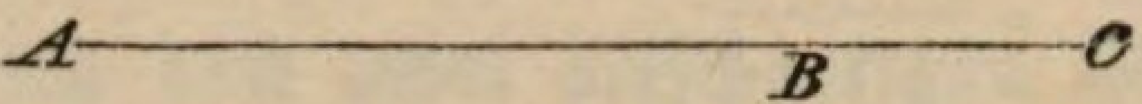
Zusatz 4. Zwei verschiedene gerade Linien können daher nur einen Punkt gemeinschaftlich haben, also auch keinen Raum einschließen oder begrenzen.

Zusatz 5. Zwei oder mehrere gerade Linien, die gleich lang sind, sind von einander nur zu unterscheiden durch den verschiedenen Ort, an welchem sie sich befinden; kommt zu der gleichen Länge noch der gleiche Ort hinzu, so sind

sie nicht mehr zu unterscheiden; sie machen alsdann nur eine und dieselbe Gerade aus.

Zusatz 6. Werden zwei oder mehrere gerade Linien so an einander gelegt, daß sie nur eine einzige Gerade

Fig. 3.



ausmachen, so stellt diese Gerade die Summe dieser einzelnen Linien vor; so ist (Fig. 3.) AC = AB + BC.

Zusatz 7. Ist AB = BC, so ist AC = 2AB = 2BC und darum $AB = BC = \frac{AC}{2}$; in diesem Falle sagt man: die Gerade AC ist im Punkte B halbirt.

Zusatz 8. In demselben Sinne werden gerade Linien von einander subtrahirt und man spricht sodann von der Differenz zweier Linien; denn ist (Fig. 3.)

$$AC = AB + BC$$

so ist $AC - AB = BC$

und $AC - BC = AB$

§. 2.

Forderung I. Zwischen zwei Punkten eine gerade Linie zu ziehen.

II. Eine gerade Linie auf beiden Seiten, so weit es verlangt wird, zu verlängern.

§. 3.

Erklärung. Wenn eine Fläche so beschaffen ist, daß eine gerade Linie, nach irgend einer beliebigen Richtung auf dieselbe gelegt, in allen ihren Punkten auf ihr aufruht, so heißt sie eben und die Fläche selbst Ebene. Krumm heißt die Fläche, wenn kein Theil derselben eben ist.

Zusatz 1. Durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, oder durch eine gerade Linie und einen Punkt außerhalb derselben ist die Lage einer Ebene bestimmt.

Zusatz 2. Haben zwei Ebenen drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, oder eine Linie und außer dieser

noch einen Punkt gemeinschaftlich, so bilden diese Ebenen, nur eine und dieselbe Ebene.

Zusatz 3. Eine unbegrenzte Linie theilt die unbegrenzte Ebene, in der sie gezogen ist, in zwei Theile, die sich entgegengesetzt liegen.

Zusatz 4. Alle Untersuchungen, die die ebene Geometrie vornimmt, geschehen an Figuren, deren Theile alle in derselben Ebene liegen, und von nun an ist dieses bei jeder Figur vorauszusetzen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt ist.

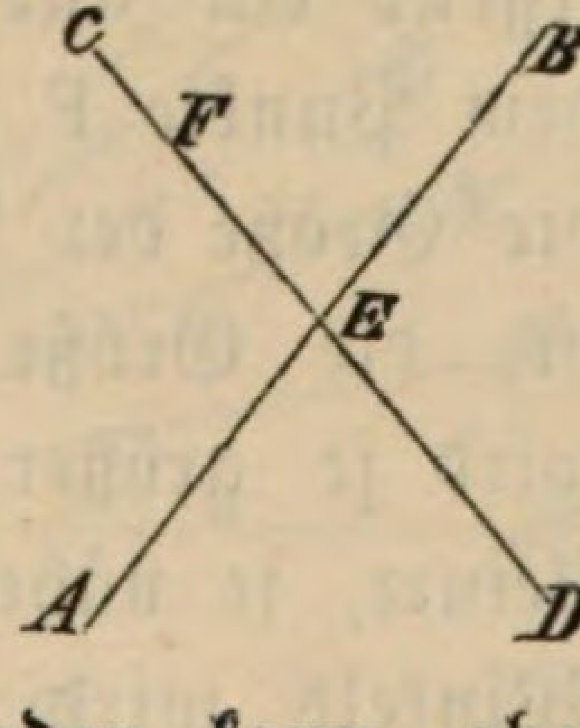
§. 4.

Forderung I. Eine Ebene nach allen Seiten, so weit es verlangt wird, zu erweitern.

II. Durch drei Punkte, die nicht in gerader Richtung liegen, oder durch eine gerade Linie und einen Punkt außerhalb derselben, eine Ebene zu legen.

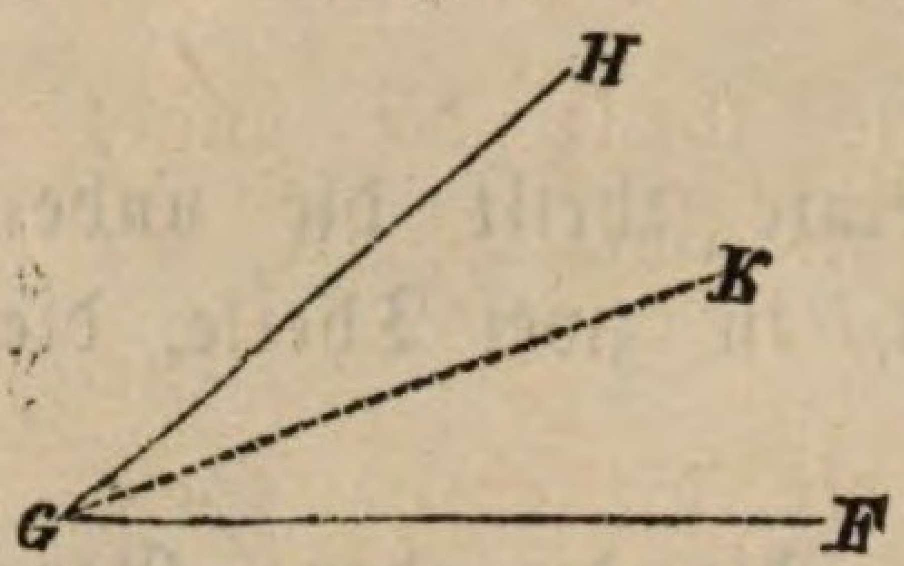
§. 5.

Fig. 4.



Erklärung. Haben zwei gerade Linien (Fig. 4.) AB und CD einen Punkt E gemeinschaftlich, so heißt dieser gemeinschaftliche Punkt E der Durchschnittspunkt, und man sagt: die beiden Linien schneiden sich in dem Punkte E. Die Lage der beiden Geraden AB und CD gegenseitig zu einander kann aber sehr verschieden seyn, obgleich sie sich immer in dem Punkte E durchschneiden. Um die Lage dieser Geraden nun zu bestimmen, denke man sich AB unbeweglich, CD aber um den Punkt E beweglich, so wird die Lage von CD gegen AB oder auch die Lage von CE gegen EA nur dann bestimmt, wenn noch CE durch einen bestimmten Punkt F geht.

Fig. 5.



Die Lage zweier Linien (Fig. 5.) GH und GF zu einander, die in einem Punkte G zusammenstoßen, oder die Neigung zweier Linien heißt man Winkel; die beiden Linien GH und GF nennt man die Schenkel und den Punkt G den Scheitel des Winkels. Durch die drei Punkte H, G, F, oder durch einen der beiden Schenkel und durch einen beliebigen Punkt des andern Schenkels (welcher aber nicht der Scheitel seyn darf) läßt sich eine Ebene legen (§. 4.); diese Ebene von zwei Seiten durch die beiden Schenkel des Winkels begrenzt, heißt die Ebene des Winkels. Diese Art von Winkel nennt man ebene Winkel.

Es ist augenscheinlich, daß die Neigung der zwei Linien GH und GF sich nicht verändert, wenn der Punkt H auf der Geraden GH dem Punkt G näher rückt oder sich entfernt, oder daß die Größe eines Winkels nicht von der Länge seiner Schenkel abhängt, sondern vielmehr von der Ausdehnung der Ebene zwischen den beiden Schenkeln; diese Größe der Ausdehnung der Ebene zwischen den beiden Schenkeln hängt aber davon ab, ob der Punkt H oder irgend ein anderer Punkt von GH (ausgenommen G) sich dem Punkte F nähert oder sich entfernt, denn dadurch wird die Größe der Ausdehnung dieser Ebene, oder was dasselbe ist, die Größe des Winkels verändert, d. h. der Winkel wird je größer, je weiter sich H von F entfernt und je kleiner, je näher H dem Punkt F rückt, ja die Größe des Winkels wird der Null gleich, wenn H auf F zu liegen kommt; alsdann liegen aber auch die beiden Schenkel GH und GF aufeinander, und machen nur eine einzige Gerade aus.

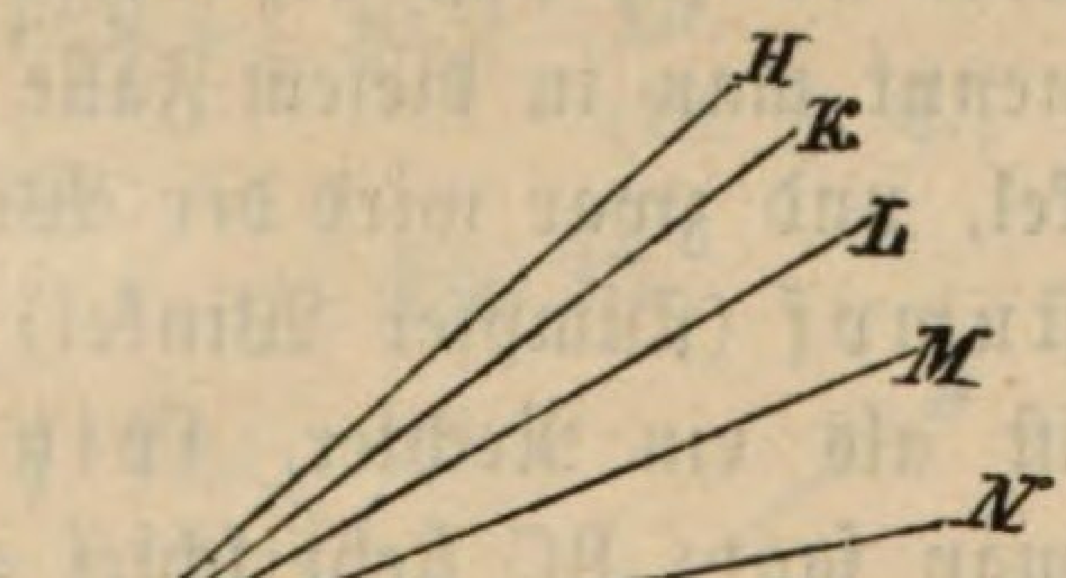
Anmerkung. Den Winkel bezeichnen wir durch drei Buchstaben, von welchem aber der mittlere den Scheitelpunkt bezeichnet, und setzen das Wort Winkel oder dessen Zeichen ($\angle$) vor, z. B.

Winkel HGF oder ∠ HGF. Häufig geschieht auch die Bezeichnung des Winkels durch die Buchstaben des kleinen Alphabets, welche man zwischen den Schenkeln, nahe dem Scheitel, einschreibt. Gehört der Scheitelpunkt nur einem einzigen Winkel an, oder ist keine Zweideutigkeit zu befürchten, so wird mit dem Buchstaben, der den Scheitelpunkt bezeichnet, öfters der Winkel selbst bezeichnet.

Zusatz 1. Denkt man sich vom Scheitel G des Winkels FGH in die Ebene desselben eine Gerade GK gelegt, so wird dadurch der Winkel in zwei andere Winkel getheilt und man hat ∠ HGF = ∠ HGK + ∠ KGF
oder ∠ HGF — ∠ HGK = ∠ KGF
und auch ∠ HGF — ∠ KGF = ∠ HGK;
demnach lassen sich Winkel addiren und subtrahiren, und man spricht daher sowohl von der Summe, als auch von der Differenz zweier Winkel, und mithin sind Winkel Größen, die mit einander verglichen werden können.

Zusatz 2. Liegt die Gerade (Fig. 5.) GK so, daß ∠ HGK = ∠ KGF ist, so sagt man: der Winkel HGF ist durch die Gerade GK halbirt.

Fig. 6.



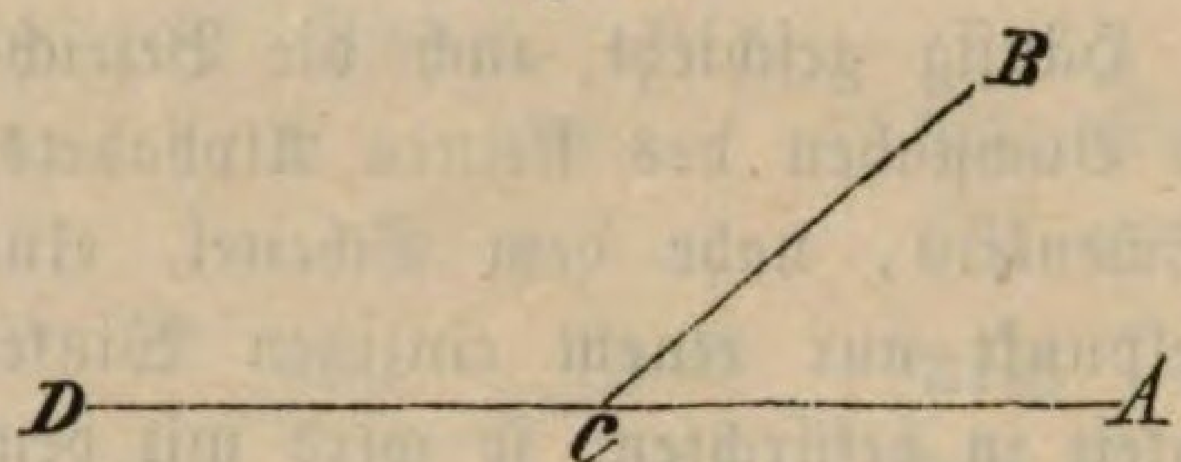
Zusatz 3. Durch den Scheitel G des Winkels HGF können mehrere Gerade, als GK, GL, GM, GN gelegt, und der Winkel kann dadurch in 2, 3, 4, 5... Theil getheilt werden. (Fig. 6.)

In diesem Falle hat man wieder: ∠ HGF
= ∠ HGK + ∠ KGL + ∠ LGM + ∠ MGN + ∠ NGF
oder ∠ HGF — ∠ LGF = ∠ HGL
oder auch ∠ HGM — ∠ KGM = ∠ HGK u. s. w.

§. 6.

Erklärung. Wenn man den einen Schenkel

Fig. 7.



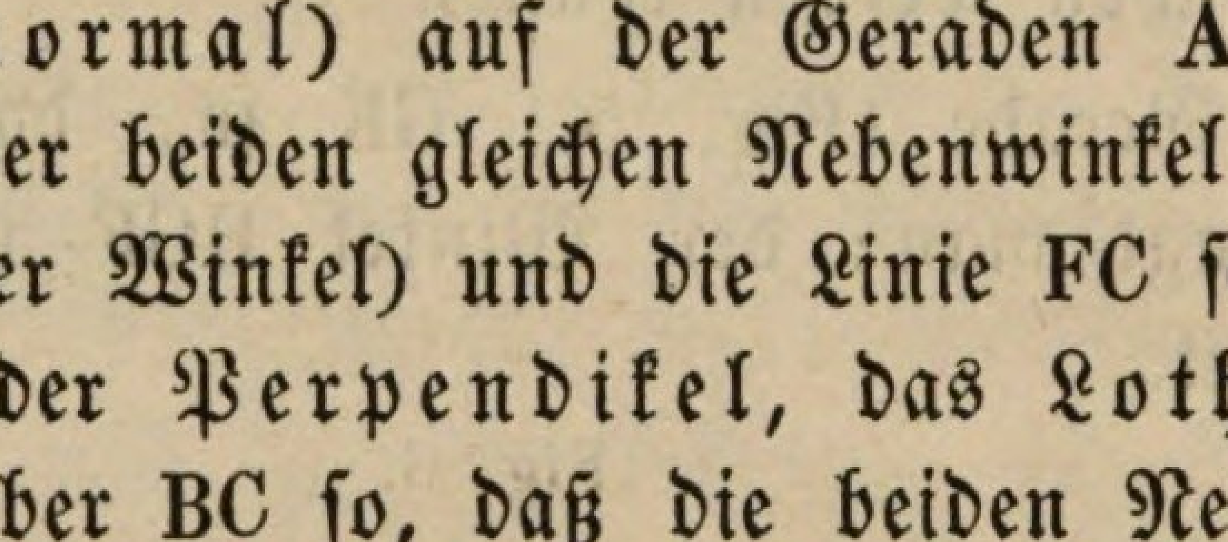
(Fig. 7.) AC des Winkels ACB über seinen Scheitel C hinaus verlängert, so entstehen zwei Winkel, nämlich $\angle$ BCA und $\angle$ BCD, welche man ihrer Lage wegen, **Nebenwinkel** nennt. Oder Nebenwinkel sind solche Winkel, welche einen Schenkel, BC, gemeinschaftlich haben und deren zwei andere Schenkel, AC, DC, in einer geraden Linie AD liegen. Je näher der gemeinschaftliche Schenkel BC dem Schenkel AC liegt, desto kleiner ist $\angle$ BCA u. desto größer $\angle$ BCD. Entfernt sich BC von AC, so wird $\angle$ BCA immer um so viel größer, als $\angle$ BCD kleiner wird; daher muß es für den gemeinschaftl. Schenkel eine Lage geben, bei welcher die beiden Nebenwinkel einander gleich sind.

Liegt bei zwei Nebenwinkeln (Fig. 8.) der gemeinschaftliche Schenkel FC so, daß $\angle$ FCD $=$ $\angle$ FCA ist, so sagt man: FC steht **senkrecht** (**perpendiculär**, **lothrecht**, **normal**) auf der Geraden AD im Punkte C und jeder der beiden gleichen Nebenwinkel heißt ein **Rechter** (rechter Winkel) und die Linie FC selbst heißt die **Senkrechte** (der **Perpendikel**, das **Loth**, die **Normale**). Steht aber BC so, daß die beiden Nebenwinkel ungleich sind, so nennt man in diesem Falle die beiden Winkel **schiefe** Winkel, und zwar wird der Winkel, der größer als ein Rechter, **stumpf** (stumpfer Winkel), so wie der Winkel, der kleiner ist als ein Rechter, **spitz** (spitzer Winkel) genannt, und man sagt: BC steht schief auf AD im Punkte C.

Anmerkung. Der rechte Winkel wird mit R bezeichnet; also ist ein stumpfer Winkel $>$ R und ein spitzer $<$ R. Daß FC senkrecht auf AD steht, wird also bezeichnet: FC $\perp$ AD.

§. 7.

Fig. 8.



Lehrsatz. Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zweien Rechten. (Fig. 8.)

Bedingung:	Behauptung:
$\angle$ ACB und $\angle$ DCB sind Nebenwinkel.	$\angle$ ACB + $\angle$ DCB = 2R.

Beweis. Steht BC senkrecht, so ist der Satz für sich klar (§. 6.). Steht BC aber schief, so denke man sich im Punkte C eine Senkrechte FC, so ist (nach §. 6.)

$$\angle ACF + \angle DCF = 2R$$

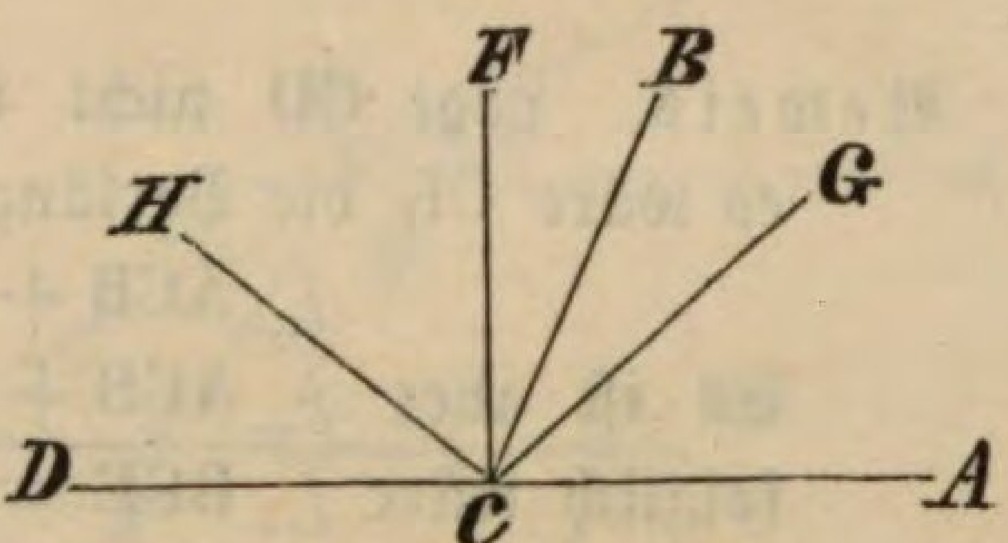
Nun ist aber $\angle ACF = \angle ACB + \angle BCF$

folglich $\angle ACB + \angle BCF + \angle DCF = 2R$

Weil aber $\angle BCF + \angle DCF = \angle DCB$

so ist $\angle ACB + \angle DCB = 2R$. (W. Z. E.)

Fig. 9.



Zusatz 1. Gehen von einem Punkte C (Fig. 9.) einer Geraden AD mehrere gerade Linien CG, CB, CF, CH... nach einer Seite dieser Geraden, so ist die Summe aller Winkel, deren gemeinschaftlicher Scheitel C ist, = 2R.

Denn es ist $\angle ACB + \angle DCB = 2R$

$\angle ACB = \angle ACG + \angle GCB$

$\angle DCB = \angle BCF + \angle FCH + \angle HCD$

$\angle ACG + \angle GCB + \angle BCF + \angle FCH + \angle HCD = 2R$.

(W. Z. E.)

Fig. 10.



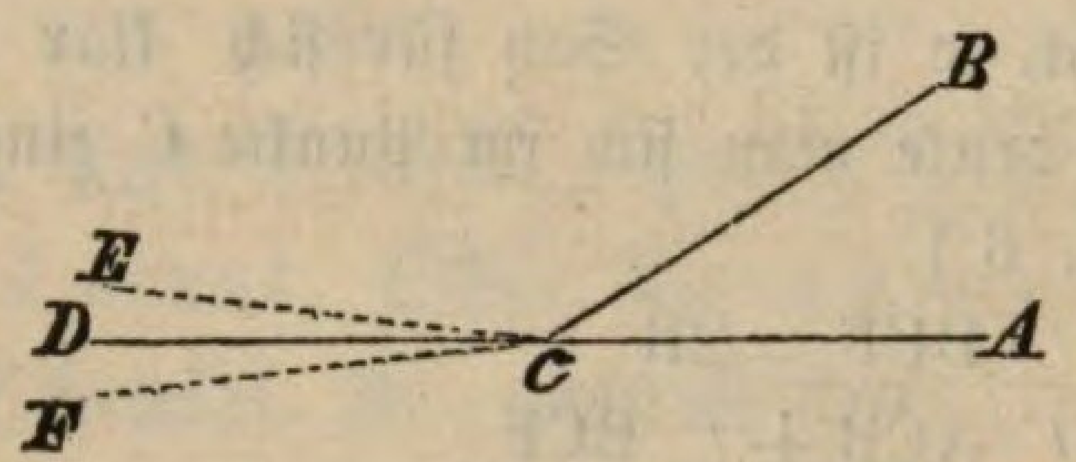
Zusatz 2. Dasselbe gilt (Fig. 10.), wenn man mehrere Gerade von dem Punkte C aus auf die andere Seite von AD zieht; daher ist die Summe aller Winkel, die in einer Ebene um einen Punkt C herum liegen = 4R.

§. 8.

Lehrsatz. Wenn die Summe zweier Winkel, die neben einander liegen und einen gemein=

schaftlichen Scheitel und Schenkel haben, gleich zweien Rechten ist, so liegen die beiden andern Schenkel dieser zwei Winkel in

Fig. 11.



einer Geraden, d. h. diese beiden Winkel sind Nebenwinkel. (Fig. 11.)

Bedingung:	Behauptung:
$\angle$ ACB + $\angle$ BCD = 2R.	$\angle$ ACB und $\angle$ BCD sind
Schenkel BC gemeinschaftlich.	Nebenwinkel.

Beweis. Läge CD nicht in der Verlängerung von AC, sondern es wäre CE die Verlängerung von AC, so wäre auch nach (§. 7.)

$\angle$ ACB + $\angle$ BCE = 2R

Es ist aber $\angle$ ACB + $\angle$ BCD = 2R (B. d. B.)

folglich wäre $\angle$ BCE = $\angle$ BCD, welches unmöglich ist. (Siehe Grundsatz 2. pag. 6.)

Daher kann CE die Verlängerung von AC nicht seyn. Eben so läßt sich zeigen, daß CF die Verlängerung von AC nicht seyn kann. Da nun die Verlängerung von AC weder oberhalb noch unterhalb CD fallen kann, so muß dieselbe nothwendig auf CD fallen, nämlich CD ist die Verlängerung selbst und mithin AD eine gerade Linie, also ACB und BCD Nebenwinkel. (§. 6.)

§. 9.

Erklärung. Von zwei Winkeln, die einander zu einem Rechten ergänzen, heißt jeder das Complement des andern, und von zwei Winkeln, die einander zu zwei Rechten ergänzen, heißt jeder das Supplement des andern.

Zusatz 1. Gleiche Winkel haben gleiche Complemente und gleiche Supplemente, und Winkel, welche gleiche Complemente und gleiche Supplemente haben, sind einander gleich.

Zusatz 2. Ungleiche Winkel haben ungleiche Complemente und ungleiche Supplemente und zwar hat der klei-

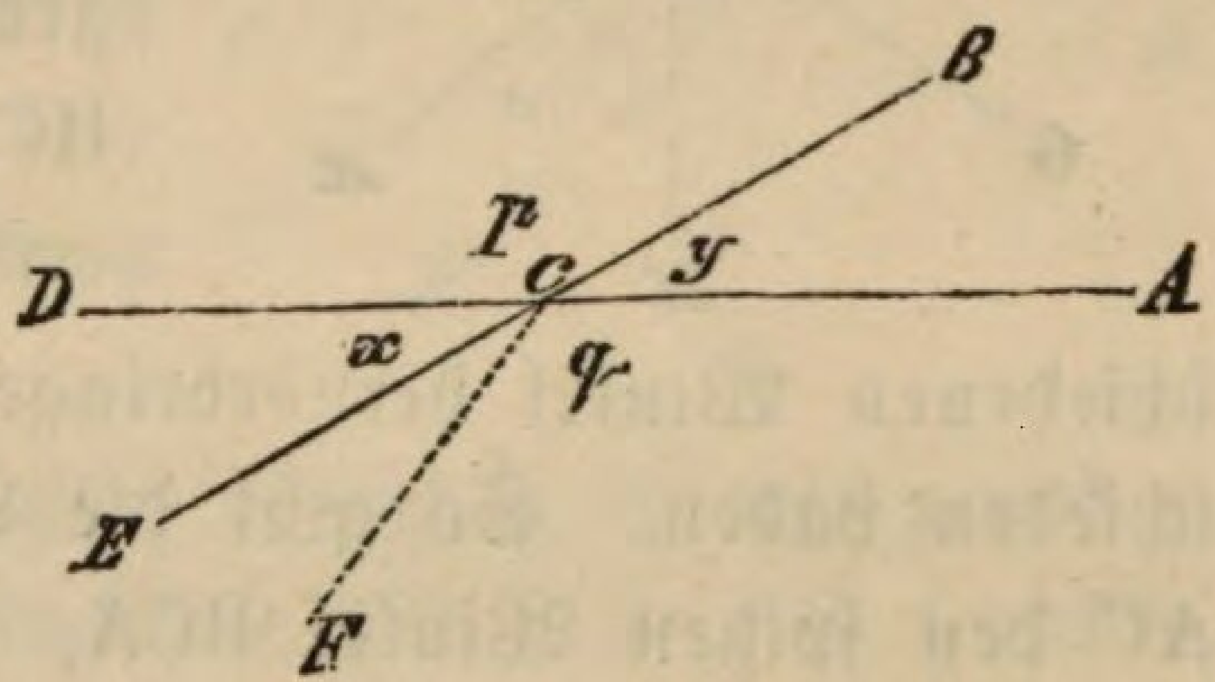
nere Winkel das größere Complement und auch das größere Supplement und umgekehrt.

Zusatz 3. Der spitze Winkel hat zu seinem Supplement einen stumpfen, der stumpfe einen spitzen und der rechte einen rechten Winkel.

§. 10.

Erklärung. Werden die beiden Schenkel eines Winkels über ihren Scheitel hinaus verlängert, so heißt das Paar Winkel, das an diesem Scheitel einander gegenüber liegt, Scheitelwinkel. So z. B. sind ∠ DCE und ∠ ACB, und eben so ∠ DCB und ∠ ECA Scheitelwinkel. (Fig. 12.)

Fig. 12.



Zusatz 1. Die Scheitelwinkel sind einander gleich.

Denn jeder von ihnen hat ein und dasselbe Supplement. (§. 9. Z. 1.) So ist x = y, weil jeder entweder ∠ DCB oder ∠ ECA zum Supplement hat, und aus demselben Grund ist ∠ DCB = ∠ ECA, weil jeder entweder x oder y zum Supplement hat.

Zusatz 2. Ist ∠ x = ∠ y und ist AD eine gerade Linie, so muß auch BE eine gerade Linie seyn.

Denn wäre BE keine gerade Linie, so ist CE nicht die Verlängerung von BC; diese Verlängerung sey CF, so wäre ∠ DCF = ∠ BCA (als Scheitelwinkel); nun ist aber ∠ DCE = ∠ BCA, daher wäre ∠ DCE = ∠ DCF, welches unmöglich ist, folglich CF nicht die Verlängerung von BC. Auf dieselbe Art läßt sich darthun, daß die Verlängerung von BC auch nicht zwischen D und E fallen kann, folglich muß sie auf CE selbst fallen, oder BE ist eine gerade Linie.

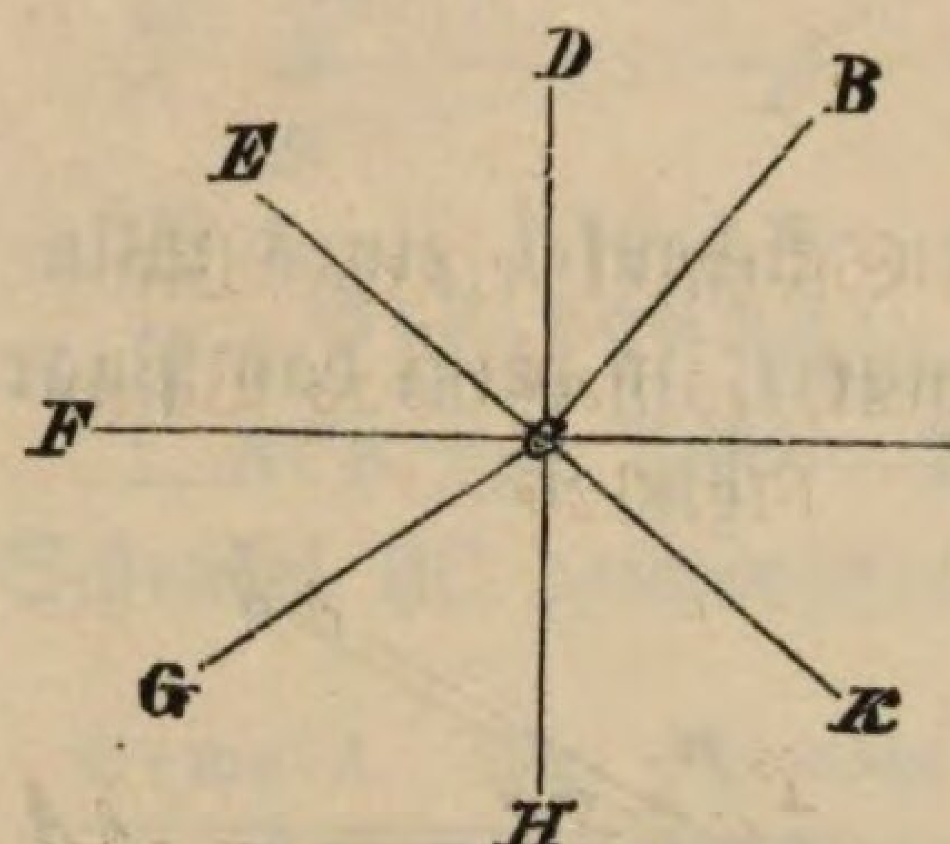
§. 11.

Erklärung. Der Winkel, der gleich zweien Rechten

ist, heißt ein flacher oder gestreckter Winkel, der, welcher kleiner ist, als zwei Rechte, ein hohler und der, welcher größer ist, als zwei Rechte, ein erhabener Winkel.

§. 12.

Fig. 13.



Wenn sich in einer Ebene eine Gerade AC (Fig. 13.) um einen ihrer Endpunkte C herumbewegt, so kommt sie in verschiedene Lagen, wie BC, DC, EC, FC, GC, HC, KC, welche alle, mit ihrer ersten Lage verglichen, die verschiedenen Winkel hervorbringen, welche wir bisher unterschieden haben. So gibt die Lage des Schenkels BC gegen AC den spitzen Winkel BCA, in der Lage DC den rechten Winkel DCA, in der Lage EC den stumpfen Winkel ECA und in der Lage FC, wenn nämlich FC und CA eine gerade Linie bilden, den gestreckten Winkel FCA = 2R. Bewegt sich diese Linie weiter und kommt in die Lage GC, so wird der Winkel größer, als zwei Rechte, nämlich GCA ist ein erhabener Winkel und in der Lage HC (wieder mit DC eine Gerade bildend) wird Winkel HCA = 3R, und kommt endlich die Gerade wieder in die erste Lage zurück, nämlich liegt BC wieder auf AC, so ist die Größe des Winkels entweder gedacht als erhabener = 4R, oder als hohler Winkel gedacht, = der Null.

Zusatz 1. Der gestreckte Winkel ist daher nichts anderes, als die gerade Linie, nämlich die beiden Schenkel des Winkels machen eine Gerade aus.

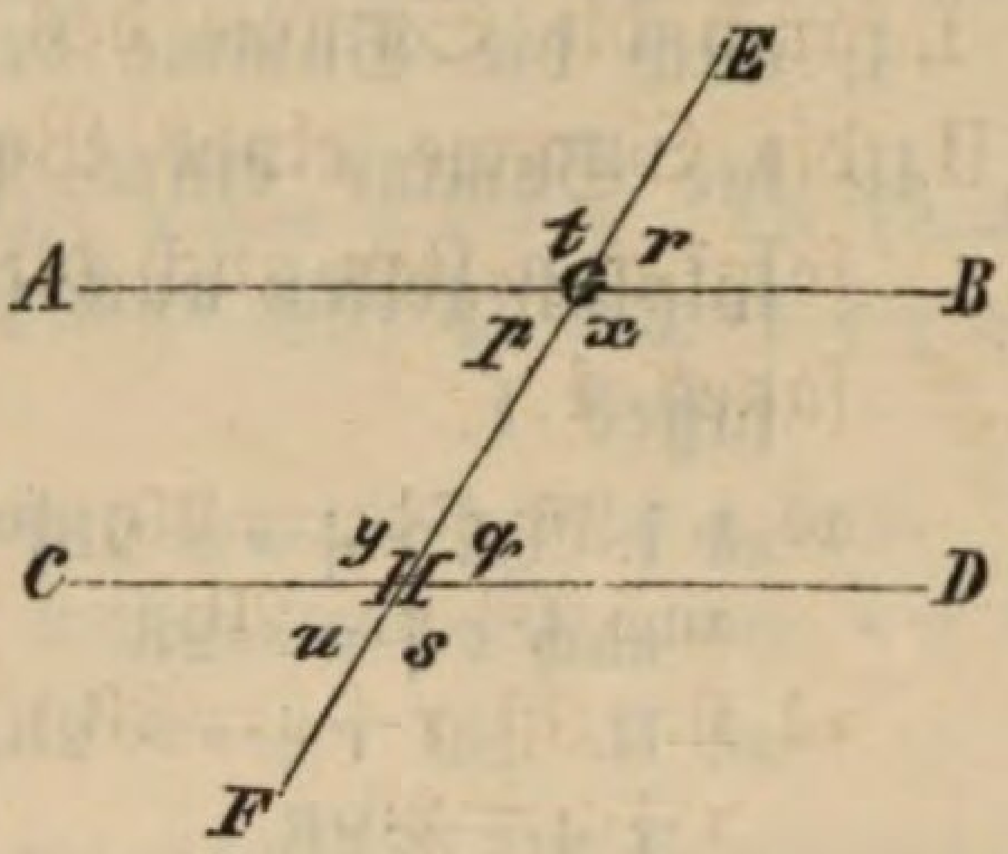
Zusatz 2. Die Summe eines hohlen und seines erhabenen Winkels ist immer = 4R. Zwei solche Winkel, die einander zu 4R ergänzen, heißen Implements-Winkel.

Anmerkung. Wird ein Winkel durch drei Buchstaben bezeichnet (§. 5. Anm.), so wäre jetzt noch hinzuzufügen, ob der hohle

oder der erhabene Winkel unter dieser Bezeichnung verstanden ist. Der Kürze wegen hat man sich allemal den hohlen Winkel unter obiger Bezeichnung vorzustellen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil ausgesprochen ist.

§. 13.

Fig. 14.



Erklärung. Werden zwei gerade Linien (Fig. 14.) AB und CD von einer dritten Geraden EF durchschnitten, so entstehen 8 Winkel, die nach ihrer verschiedenen Lage zu einander paarweise verschiedene Namen erhalten; man unterscheidet

2 Paar innere Winkel, nämlich x und q, so wie p und y,
2 Paar äußere Winkel, nämlich r und s, so wie t und u,
2 Paar innere Wechselwinkel, nämlich x und y, so wie p und q,
2 Paar äußere Wechselwinkel, nämlich r und u, so wie t und s,
4 Paar correspondirende Winkel, als x und s; p und u; r und q; t und y.

Zusatz 1. Ist die Summe eines Paares innerer Winkel $= 2R$, so ist

I. die Summe des andern Paares ebenfalls $= 2R$,
II. die Summe jedes Paares äußerer Winkel $= 2R$,
III. die zusammengehörigen, sowohl innern, als äußern Wechselwinkel, d. h. welche ein Paar bilden, sind einander gleich,
IV. die zusammengehörigen correspondirenden Winkel jedes Paares sind einander gleich.

Denn ad I. Ist $x + q = 2R$, so ist, weil $x + p + y + q = 4R$ (nach §. 7.), auch $p + y = 2R$.

ad II. Ist $x + q = 2R$, so ist, weil $r + x + q + s = 4R$ (nach §. 7.), auch $r + s = 2R$.

ad III. Ist $x+q=2R$, so ist, weil $q+y=2R$ (nach §. 7.), auch $x+q=q+y$ und daraus $x=y$.

ad IV. Ist $x+q=2R$, so ist, weil $q+s=2R$ (nach §. 7.), auch $x+q=q+s$ und daraus $x=s$.

Zusatz 2. Ist die Summe eines Paares äußerer Winkel $=2R$, so ist

I. auch die Summe des andern Paares $=2R$ und

II. die Summe eines Paares innerer Winkel $=2R$ und folglich gelten auch die übrigen Behauptungen des Zusatzes 1.

ad I. Ist $r+s=2R$, so ist, weil (§. 7.) $r+t+s+u=4R$, auch $t+u=2R$.

ad II. Ist $r+s=2R$, so ist, weil $r+x+q+s=4R$, auch $x+q=2R$.

Zusatz 3. Sind die zusammengehörigen Wechselwinkel eines Paares einander gleich, so sind

I. auch die zusammengehörigen der andern Paare einander gleich, und

II. die Summe eines Paares innerer Winkel $=2R$; mithin gelten auch die übrigen Behauptungen des Zusatzes 1.

Denn ad I. Ist $x=y$, so ist, weil (§. 7.) $x+p=2R=y+q$, ebenfalls $p=q$.

ad II. Ist $x=y$, so ist, weil (§. 7.) $x+p=2R$, auch $y+p=2R$.

Zusatz 4. Sind die zusammengehörigen correspondirenden Winkel eines Paares einander gleich, so sind auch

I. die zusammengehörigen correspondirenden Winkel der übrigen Paare einander gleich, und

II. die Summe eines Paares innerer Winkel $=2R$; mithin gelten auch alle übrigen Folgerungen des Zusatzes 1.

ad I. $x=s$, so ist, weil $x+p=2R=s+u$ (§. 7.), auch $p=u$.

ad II. Ist $x=s$, so ist, weil $s+q=2R$ (§. 7.), auch $x+q=2R$.

Zusatz 5. Ist die Summe eines Paares innerer Winkel ungleich zweien Rechten, so ist auch

I. die Summe des andern Paares ungleich zweien Rechten, und zwar: ist das eine Paar $>2R$, so ist das andere Paar $<2R$;

II. die zusammengehörigen Wechselwinkel eines Paares sind ungleich;

III. die zusammengehörigen correspondirenden Winkel eines Paares sind ungleich.

ad I. Ist $x+q \gtrless 2R$, so ist, weil $x+p+q+y=4R$ (nach §. 7.), $p+y \lessgtr 2R$ und ist $x+q<2R$, so muß $p+y>$ $2R$ seyn.

ad II. Ist $x+q \gtrless 2R$, so ist, weil $y+q=2R$, auch $x \gtrless y$.

ad III. Ist $x+q \gtrless 2R$, so ist, weil $q+s=2R$, auch $x+q \gtrless q+s$, also $x \gtrless s$.

Zusatz 6. Sind die zusammengehörigen Wechselwinkel oder correspondirenden Winkel eines Paares ungleich, so sind sie auch aller Paare ungleich, und eben so ist die Summe eines Paares innerer oder äußerer Winkel ungleich zweien Rechten.

Was sich leicht aus dem vorigen Zusatz ergibt.

Zusatz 7. Sind die zusammengehörigen Wechselwinkel eines Paares ungleich, so ist die Summe desjenigen Paares der innern Winkel, in welchem der größere Wechselwinkel liegt, größer als zwei Rechte und umgekehrt.

Denn ist $x \gtrless y$, etwa $x<y$, so ist, weil (§. 7.) $x+p=2R$, offenbar $y+p>2R$.

§. 14.

Erkärung. Haben zwei gerade Linien, die in einer und derselben Ebene liegen, keinen Punkt gemeinschaftlich, man mag diese Linien auch noch so weit verlängern, als man will, so laufen diese Linien parallel mit einander und sie selbst heißen Parallellinien. Nichtparallele Linien in einer nämlichen Ebene liegend, müssen sich, gehörig verlängert, durchschneiden. Nach der Richtung hin, wo sie sich schneiden, heißen sie convergent (zusammenfahrend)

und nach der andern Richtung **divergent** (auseinanderfahrend).

Anmerkung. Man bezeichnet das Parallelseyn zweier Linien durch das Zeichen ||, nämlich AB || CD heißt: AB ist parallel mit CD; hingegen heißt AB ∧ CD so viel als AB ist nicht parallel mit CD. Sind zwei Linien gleich und parallel zugleich, so wird das Gleichheitszeichen mit dem Parallelzeichen verbunden, nämlich AB ⋕ CD heißt: AB ist gleich und parallel mit CD.

§. 15.

Lehrsatz. **Wenn zwei gerade Linien AB und CD (Fig. 14.) von einer dritten Geraden EF geschnitten werden, und es sind die zusammengehörigen correspondirenden Winkel eines Paares einander gleich, so sind die Linien AB und CD parallel.**

Bedingung.	Behauptung.
$x = s$.	AB || CD.

Beweis. Weil $x = s$, so ist auch $p = u$ (§. 13. Z. 4.); daher haben die Linien AB und CD gegen die Linie EF auf beiden Seiten dieselbe Lage; würde nun bei gehöriger Verlängerung von AB und CD auf der einen Seite von EF ein Durchschnitt erfolgen, so müßte er auch auf der andern Seite, weil die Bedingungen der Lage dieselben sind, erfolgen; mithin würden die beiden Geraden in zwei Punkten sich schneiden, welches unmöglich ist. Die Linien AB und CD werden sich daher gar nicht schneiden, d. h. sie sind parallel (§. 14.).

Zusatz 1. Also ist auch AB || CD, wenn

I. die Summe eines Paares innerer Winkel $= 2R$, oder

II. die Summe eines Paares äußerer Winkel $= 2R$ ist, oder

III. die zusammengehörigen äußern oder innern Wechselwinkel eines Paares gleich sind (§. 13. Z. 1. u. 4.).

Zusatz 2. Würde die Linie AB ihre Lage gegen die Linie EF verändern, würde der Winkel x kleiner und da-

durch Winkel p größer werden, so würde auch die Lage der Linie AB gegen die Linie CD sich verändern. Nämlich dreht sich AB um G so herum, daß x kleiner und p größer wird, so muß durch diese Drehung der Punkt B der Linie AB der Linie CD näher rücken, hingegen der Punkt A der Linie AB sich immer mehr von der Linie CD entfernen, d. h. die Geraden AB und CD werden in der Richtung von A nach B convergiren (sich schneiden), in der Richtung von B nach A aber divergiren. Ist also $x \gtrless s$, so ist auch $x \gtrless y$ und $x + q \lessgtr 2R$ (13. Z. 6.), und in diesem Fall schneiden sich die Geraden AB und CD und zwar nach der Seite hin, auf welcher $x + q < 2R$ ist.

§. 16.

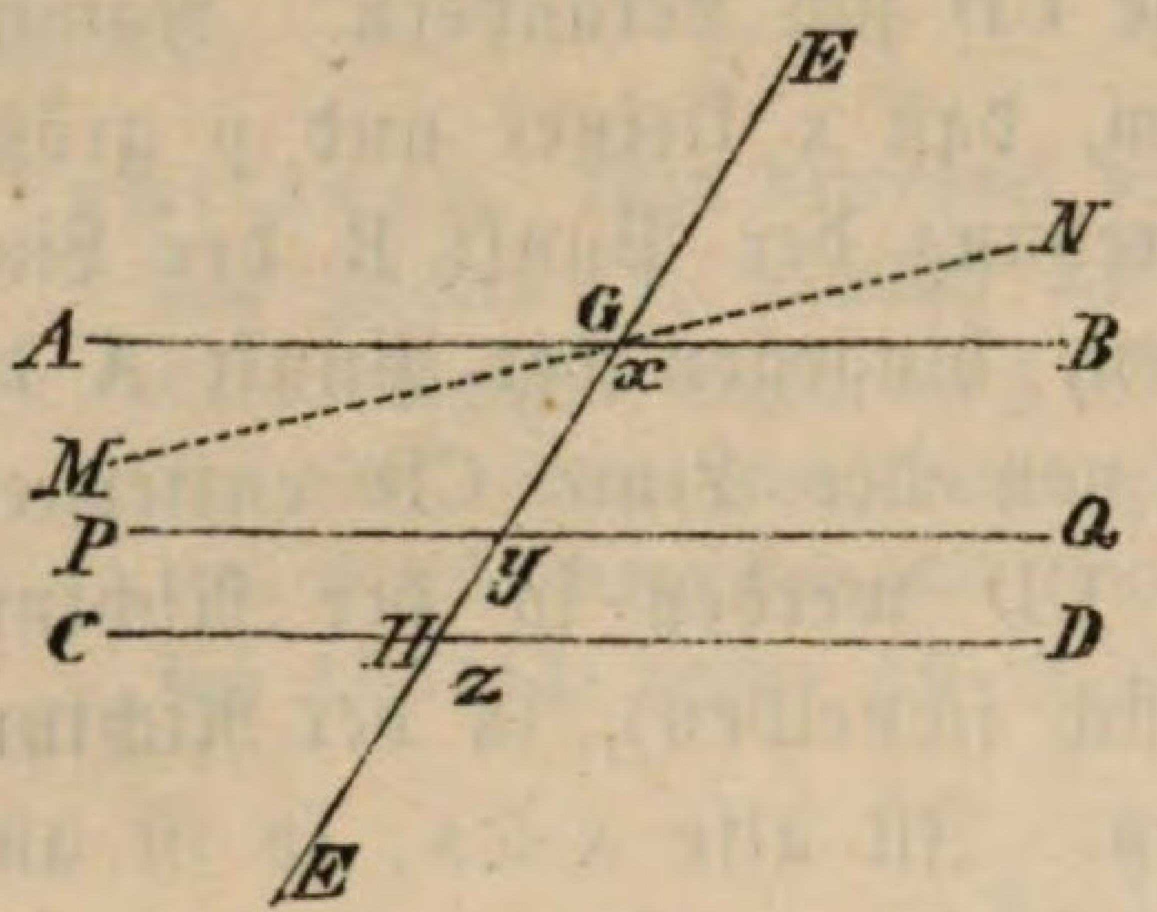
Lehrsatz. Wenn zwei Parallelen AB und CD (Fig. 14.) von einer dritten EF geschnitten werden, so sind

I. die correspondirenden Winkel jedes zusammengehörigen Paares einander gleich,
II. die Wechselwinkel jedes zusammengehörigen Paares einander gleich, und ist
III. die Summe eines Paares innerer oder äußerer Winkel gleich zweien Rechten.

Bedingung:	Behauptung:
AB ‖ CD.	I. $x = s$;
	II $x = y$;
	III. $x + q = 2R$.

Beweis. 1) Wäre $x \gtrless s$, so würden (§. 15. Z. 2.) die Linien AB und CD sich schneiden, wären folglich nicht parallel, was offenbar gegen die Bedingung ist; daher muß $x = s$ seyn.
II) Ist $x = s$, so ist (§. 13. Z. 4.) auch $x = y$ und III) $x + q = 2R$.

Fig. 15.



Zusatz 1. Durch einen Punkt G (Fig. 15.) ist zu CD nur eine einzige Parallele AB möglich.

Denn wäre noch eine zweite, etwa MN möglich, so wäre ∠NGF = ∠DHF; vermöge der Bedingung ist aber ∠BGH = DHF,

folglich wäre ∠NGF = ∠BGF, was unmöglich ist.

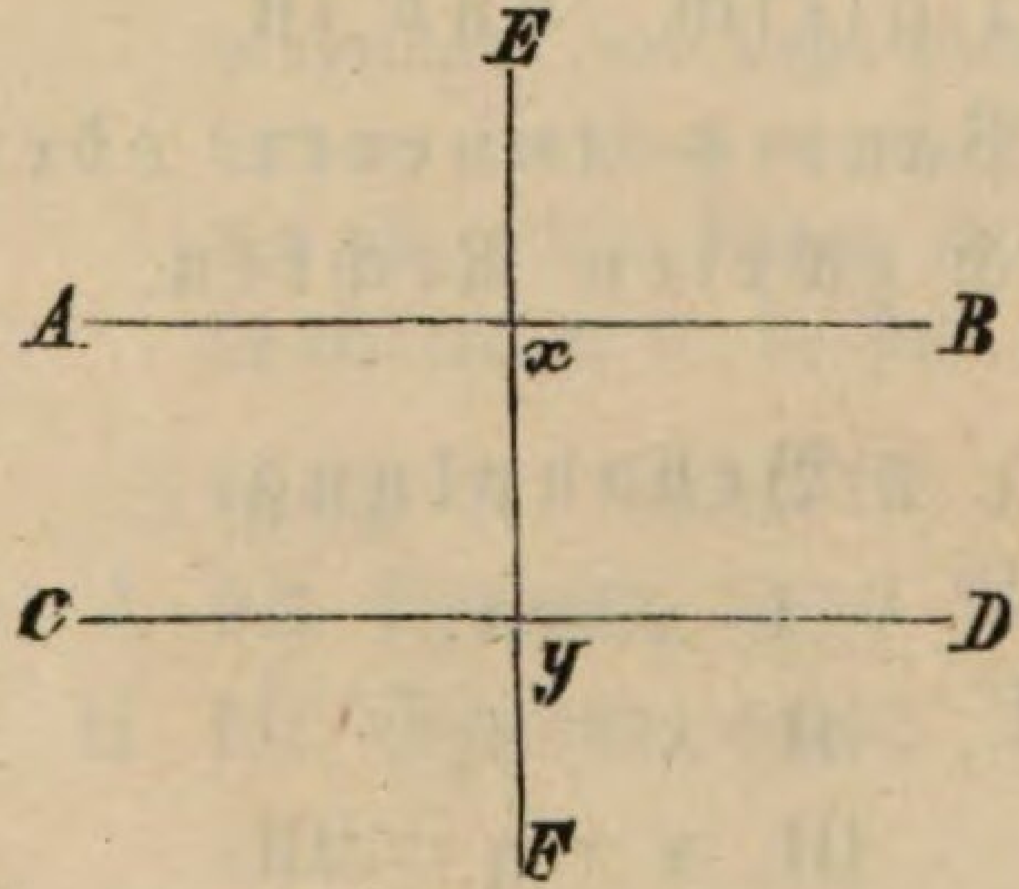
Zusatz 2. Ist (Fig. 15.) AB || CD, und AB wird von MN in G geschnitten, so muß bei gehöriger Verlängerung auch CD von MN geschnitten werden.

Denn würde MN die CD bei genugsamer Verlängerung nicht schneiden, so wäre MN || CD (§. 14.), folglich durch den Punkt G zwei Parallele zu CD, was gegen vorigen Zusatz ist.

Zusatz 3. Sind zwei Gerade (Fig. 15.) AB und CD einer dritten PQ parallel, so sind sie selbst parallel.

Denn weil AB || PQ, so ist x = y, und weil CD || PQ, so ist z = y, folglich auch x = z, d. h. AB || CD. (§. 15.)

Fig. 16.



Zusatz 4. Ist (Fig. 16.) AB || CD und EF ⊥ AB, so ist auch EF ⊥ CD.

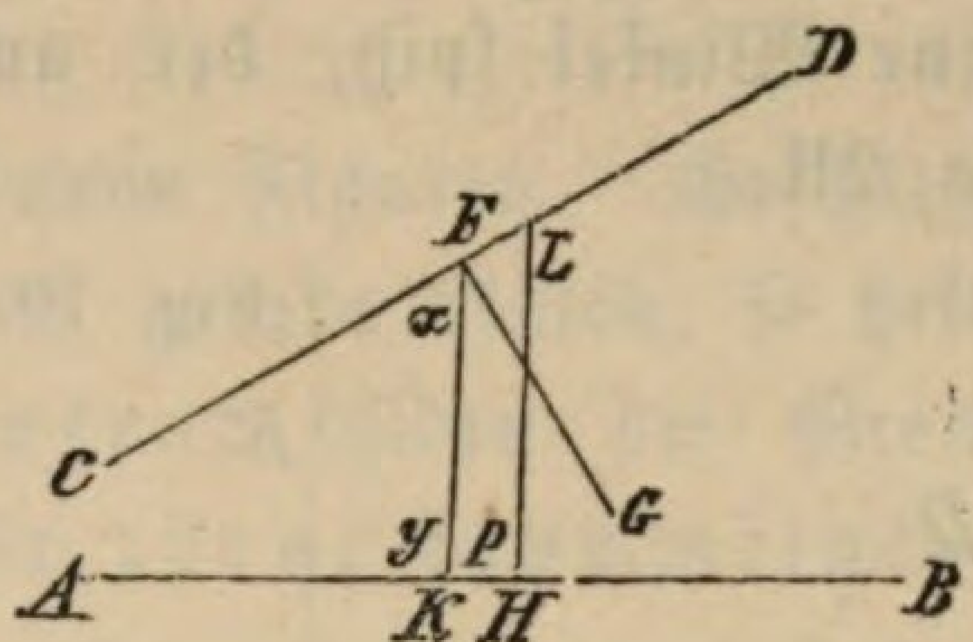
Denn weil AB || CD, so ist x = y, und weil EF ⊥ AB, so ist (§. 6) x = R; folglich auch y = R oder EF ⊥ CD. (§. 6.)

Zusatz 5. Umgekehrt: Ist EF ⊥ AB und EF ⊥ CD, so ist AB || CD.

Denn ist EF ⊥ AB, so ist x = R, und ist zugleich EF ⊥ CD, so ist auch y = R; mithin ist x = y d. h. AB || CD. (§. 15.)

Zusatz 6. Wenn man in den Punkten F und H (Fig. 17.) zweier sich schneidender gerader Linien AB und CD die Senkrechten FG nnd HL errichtet, so müssen sich diese Senkrechten, gehörig verlängert, durchschneiden.

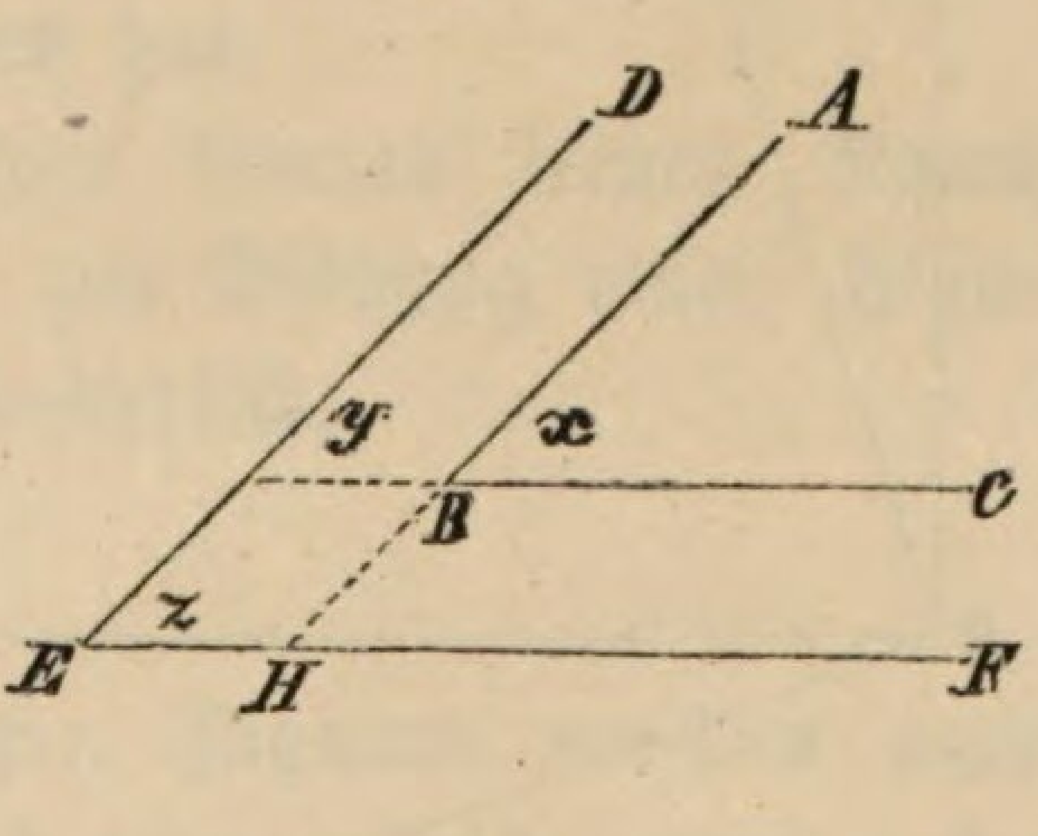
Fig. 17.



Denn durchschnitten, bei gehöriger Verlängerung, diese Senkrechten sich nicht, so müßten sie parallel laufen (§. 14.) Angenommen sie liefen parallel, und es sey FK senkrecht auf CD und zugleich parallel mit HL, so müßte, weil $p = R$ (denn HL ist senkrecht auf AB), und $y = p$, also auch $y = R$ seyn. Eben so wäre $x = R$; also müßte $x + y = 2R$ und mithin (§. 15.) AB || CD seyn, was gegen die Bedingung. Daher kann die Senkrechte auf CD nicht parallel mit HL seyn, d. h. sie müssen sich schneiden.

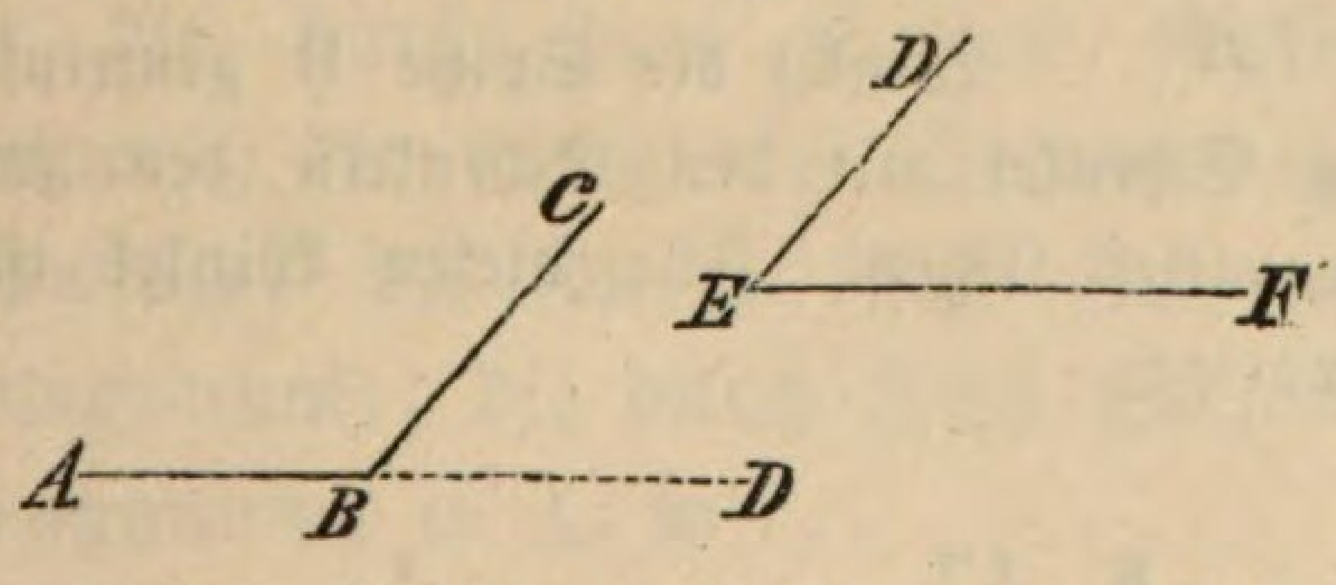
Zusatz 7. Wenn die Schenkel zweier Winkel, mit einander parallel laufen, und jeder von beiden ist entweder spitz oder stumpf, so sind sie einander gleich, ist aber der eine spitz, der andere stumpf, so ist ihre Summe $= 2R$.

Fig. 18.



Denn es sey (Fig. 18.) AB || DE und BC || EF, so muß BC verlängert die DE schneiden (Z 2.). Nun ist $x = y$ und $y = z$ (§. 16.), folglich $x = z$, oder $\angle ABC = \angle DEF$. Dieses gilt, wenn $\angle ABC$ und $\angle DEF$ zugleich spitze oder stumpfe Winkel vorstellen.

Fig. 19.

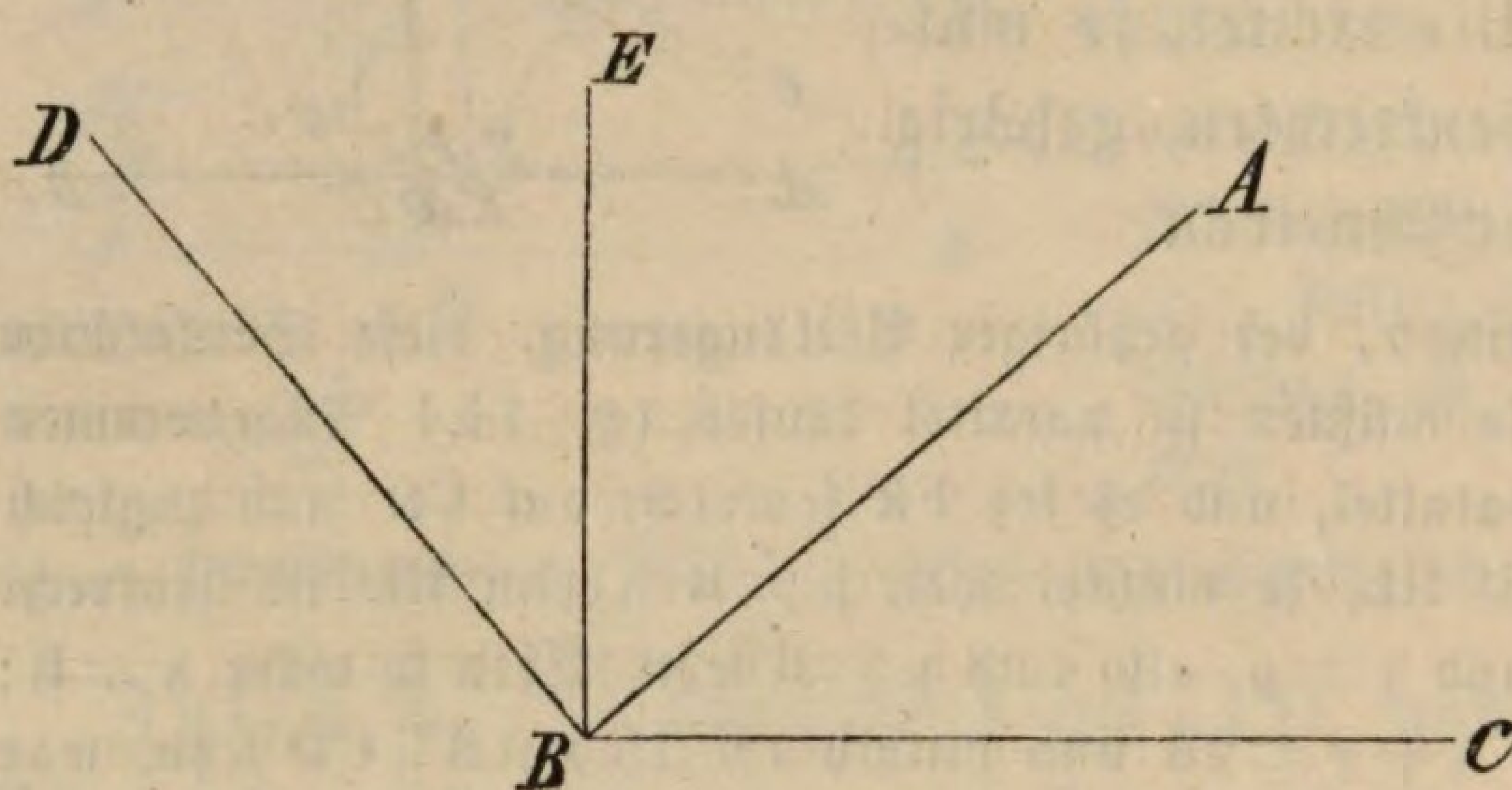


Ist aber (Fig. 19.) DE || CB und EF || AB, der Winkel DEF $< R$ und ABC $> R$, so verlängere man den Schenkel AB, so ist jetzt $\angle CBD' = \angle DEF$ u. weil $\angle CBD' + \angle CBA = 2R$, so ist $\angle DEF + \angle ABC = 2R$.

Zusatz 8. Stehen die Schenkel zweier Winkel bezüglich auf einander senkrecht, und beide sind zugleich spitz oder

stumpf, so sind die Winkel einander gleich; ist jedoch der eine Winkel spitz, der andere stumpf, so ergänzen sie sich zu 2R.

Fig. 19. a.

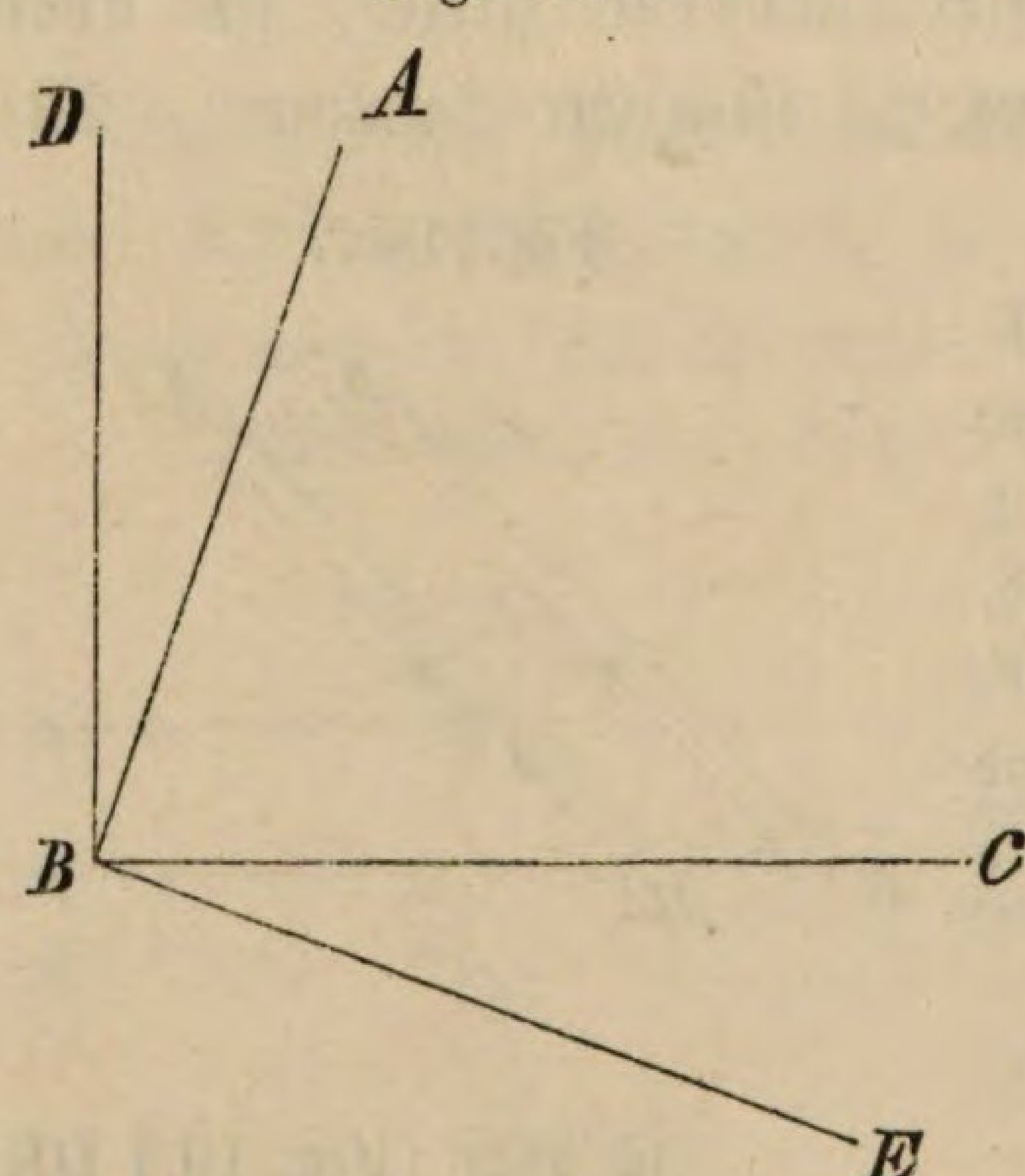


Denn haben (Fig. 19. a.) die beiden spitzen Winkel ABC und DBE die Spitze B gemeinschaftlich und ist DB senkrecht auf AB und EB senkrecht auf BC, so ist

$$\angle DBE + \angle EBA = \angle EBA + \angle ABC = R$$

folglich $\angle DBE = \angle ABC$. Aehnlich ist der Beweis, wenn die beiden Winkel DBE und ABC stumpf sind.

Fig. 19. b.



Ist hingegen (Fig. 19. b.) der eine Winkel stumpf, der andere spitz, etwa $\angle DBE > R$ und $\angle ABC < R$, und zugleich AB senkrecht auf BE und DB senkrecht auf BC, z. B. ist

$$\angle DBE = R + \angle CBE$$
$$\angle ABC = R - \angle CBE$$

folglich $\angle DBE + \angle ABC = 2R$.

Haben die beiden Winkel die Spitze nicht gemeinschaftlich, so läßt sich mit Zusatz 7 ein dritter Winkel construiren, der mit dem ersten Winkel die Spitze B gemeinschaftlich hat, und dessen Schenkel mit den Schenkeln des zweiten Winkels bezüglich parallel liegen. Für diesen Winkel ist der Beweis genau der vorige.

§. 17.

Erklärung. Wird eine Fläche von allen Seiten begrenzt, so entsteht eine (Flächen-) **Figur**; ist die be-

grenzte Fläche eine Ebene (§. 3.), so heißt die Figur ebene Figur.

Wir handeln hier blos von ebenen Figuren. Geschieht die Begrenzung dieser Figuren durch gerade Linien, so heissen sie ebene geradlinige Figuren; bilden die Grenzen krumme Linien, so nennt man sie ebene krummlinige Figuren.

Die geraden Linien, welche die Grenzen bilden, heißen Seiten der Figuren, und die Summe aller Seiten der Umfang (Perimeter) der Figur.

Der Winkel, welchen zwei Seiten bilden, heißt Umfangs- (Poligon-) Winkel und ist derselbe erhaben, wird er ein einspringender, und ist derselbe hohl, ein ausspringender Umfangswinkel genannt.

Die geraden Linien, welche von der Spitze eines Umfangswinkels zur Spitze eines andern gezogen werden, ohne selbst mit einer Seite der Figur zusammenzufallen, heißen Diagonalen.

Zusatz 1. Jede geradlinige Figur hat eben so viele (Umfangs-) Winkel, als sie Seiten hat.

Zusatz 2. Zwei gerade Linien können keinen Raum begrenzen (§. 1. Z. 4.); es sind zur Bildung einer Figur mindestens drei gerade Linien erforderlich.

§. 18.

Erklärung. Die geradlinigen Figuren werden nach der Anzahl der Seiten, die sie begrenzen, benannt. So heißt die durch drei Seiten begrenzte: Dreieck (Triangulum); die durch vier Seiten begrenzte: Viereck (Tetragonum); die durch fünf Seiten begrenzte: Fünfeck (Pentagonum); die durch sechs Seiten begrenzte: Sechseck (Hexagonum) u. s. w.

Gewöhnlich wird aber auch jede geradlinige Figur, die von mehr als drei Seiten begrenzt ist: Vieleck (Polygonum) genannt.

Figuren, die lauter gleiche Seiten haben, nennt man gleichseitig, die ungleiche Seiten haben ungleichseitig, so wie die, die lauter gleiche Winkel haben, gleichwinkelig.

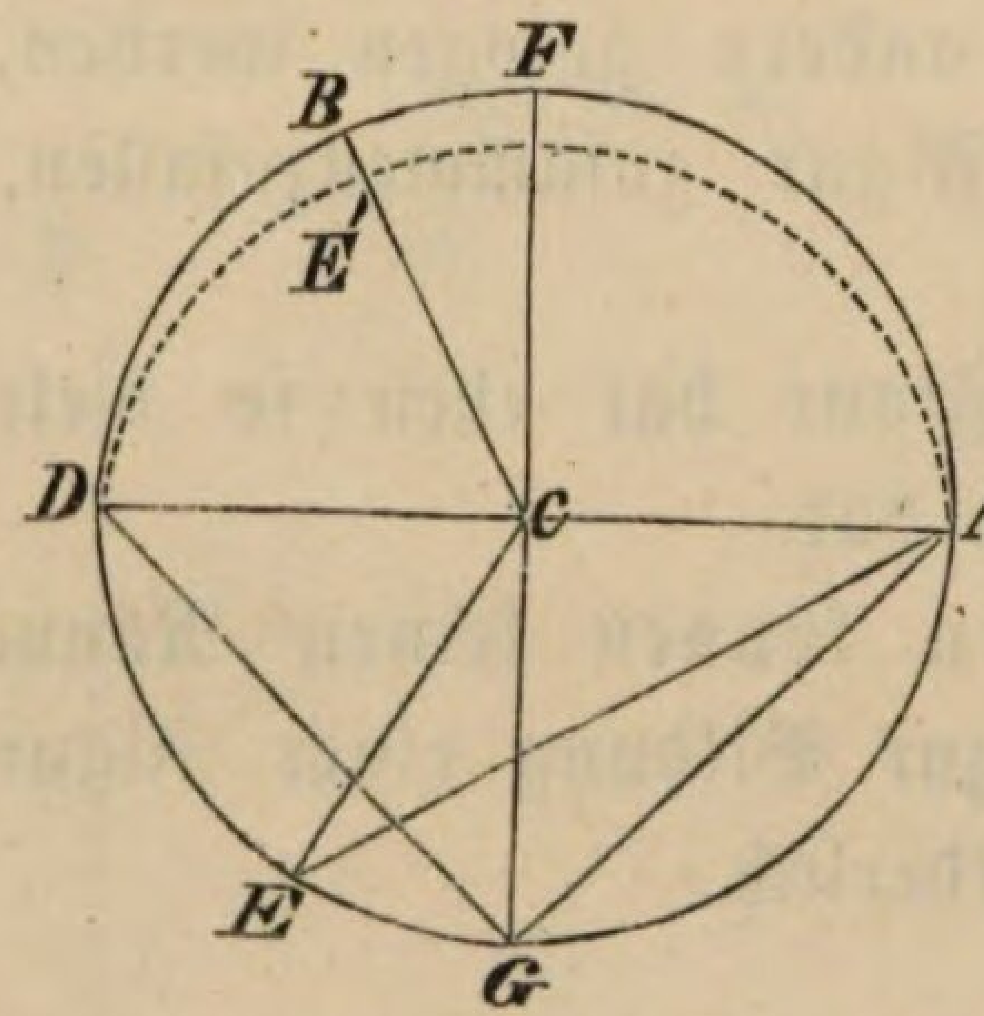
Sind die Seiten einer Figur, so wie die (Umfangs-) Winkel, die dieselben bilden, einander gleich, so heißt die Figur regelmäßig (regulär).

Zwei Figuren, die gleichen Umfang haben, heißen isoperimetrisch.

Zusatz. Wir werden in der Folge nur solche Vielecke betrachten, die keine einspringenden Winkel haben und bei denen die Seiten nur in ihren Endpunkten sich treffen.

§. 19.

Fig. 20.



Erklärung. Bewegt sich in einer Ebene eine gerade Linie AC (Fig. 20.) um ihren einen Endpunkt C, als um einen festen Punkt so herum, bis sie wieder in ihre vorige Lage kommt, so beschreibt der andere Endpunkt A eine krumme Linie AFBDEGA, welche Kreislinie, Umkreis, (Peripheria) und die Fläche, die sie begrenzt, Kreisfläche, schlechtweg Kreis (Circulus) genannt wird. Der Punkt C heißt der Mittelpunkt (Centrum), jede Gerade AC, DC, BC, welche den Mittelpunkt C mit irgend einem Punkt A. D, B des Umkreises verbindet, heißt Halbmesser (Radius) und jede Gerade AE, DG, welche zwei Punkte des Umkreises verbindet, heißt Sehne (Chorda); geht aber die Sehne durch den Mittelpunkt wie AD, FG, so heißt sie Durchmesser (Diameter).

Irgend ein Theil der Peripherie, wie AG, DB, BF, heißt ein Bogen (Arcus); jeder Theil der Kreisfläche DCB

oder ECA begrenzt durch zwei Halbmesser und den zwischen ihnen liegenden Bogen wird ein (Kreis-) Ausschnitt (Sector) und der Theil der Kreisfläche, wie AEGA, zwischen der Sehne und ihrem Bogen ein (Kreis-) Abschnitt (Segmentum) genannt.

Endlich ein Winkel DAE, oder Winkel EAG, welchen zwei Sehnen bilden, heißt Peripherie- (Umfangs-) Winkel und der, den zwei Halbmesser einschließen, wie Winkel ECA, oder Winkel BCF heißt Centri- (Mittelpunkts-) Winkel.

Zusatz 1. Also ist die Kreislinie eine krumme Linie von der Beschaffenheit, daß alle ihre Punkte von einem gemeinschaftlichen Punkt (Mittelpunkt) gleichweit entfernt liegen.

Zusatz 2. Also sind in einem und demselben Kreise alle Halbmesser einander gleich und daher auch alle Durchmesser (als doppelte Halbmesser).

Anmerkung. Die Kreislinie ist die einzige krumme Linie, die die niedere Geometrie betrachtet.

§. 20.

Forderung. Mit jedem beliebigen Halbmesser aus einem gegebenen Punkte einen Kreis zu beschreiben.

Anmerkung. Die Beschreibung einer Kreislinie mittelst des bekannten Instruments, des Zirkels, ist nichts anderes, als die (§. 19.) angegebene Bewegung der Geraden AC in einer Ebene. Der eine Fußpunkt des Zirkels bildet den Umdrehungspunkt C, während der andere, als Punkt A, die Kreislinie beschreibt; die Oeffnung des Zirkels, d. h. die Entfernung der beiden Fußpunkte (Spitzen der Schenkel des Zirkels) ist die Gerade AC selbst und bildet den Halbmesser des zu beschreibenden Kreises.

§. 21.

Erklärung. Kann man sich zwei Figuren so beschaffen denken, daß sie, gehörig auf einander gelegt, einander

decken, d. h. daß ihre Grenzen genau auf einander fallen, so nennt man solche Figuren congruent, oder man sagt: sie decken einander.

Zusatz 1. Figuren, die einander decken, sind sich vollkommen gleich: es besteht die eine Figur genau aus denselben Seiten und denselben Winkeln, wie die andere, auch ist der Flächenraum, den die Seiten der einen Figur einschließen, genau dem gleich, den die Seiten der andern Figur begrenzen.

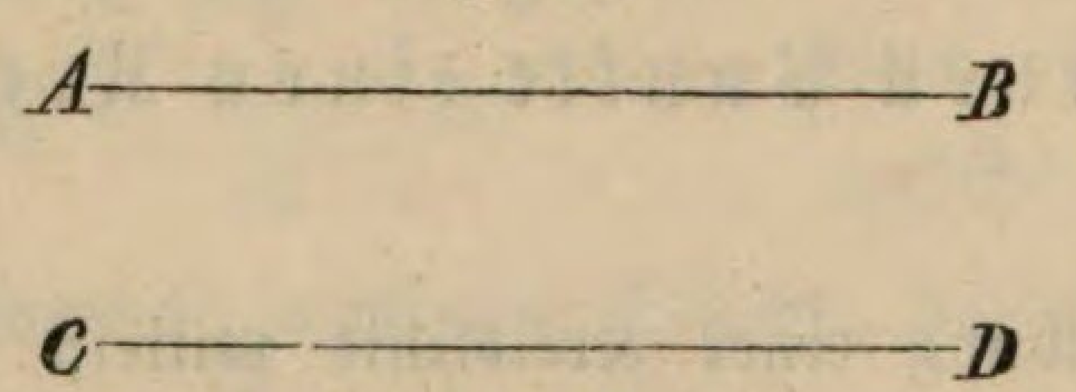
Zusatz 2. Aus der Congruenz zweier Figuren läßt sich demnach auch auf die Gleichheit des Flächenraums schließen, aber nicht umgekehrt aus der Gleichheit des Flächenraums auf die Congruenz der Figuren. Denn es läßt sich wohl ein Dreieck denken, das denselben Flächenraum einschließt, wie ein Kreis; beide Figuren werden aber nicht als congruent gedacht werden können.

Anmerkung. Das Zeichen der Congruenz ist $\cong$, nämlich $A \cong B$ bedeutet: A ist congruent mit B.

§. 22.

Lehrsatz. Zwei gerade Linien, die gleich lang sind, müssen, gehörig auf einander gelegt, einander decken (Fig. 21.).

Fig. 21.



Bedingung:
AB und CD sind gerade Linien
AB = CD.

Behauptung:
$AB \cong CD$.

Beweis. Nimmt man in Gedanken die Linie AB und legt sie so auf CD, daß der Punkt A auf den Punkt C und die Linie AB selbst in die Richtung der Linie CD fällt, so muß, weil beide Linien gerade sind, jeder Punkt von AB auf CD und weil diese Linien auch gleich lang sind, der Endpunkt B der einen Linie genau auf den Endpunkt D der andern Linie fallen; mithin decken sich beide Linien, und sind also einander vollkommen gleich.

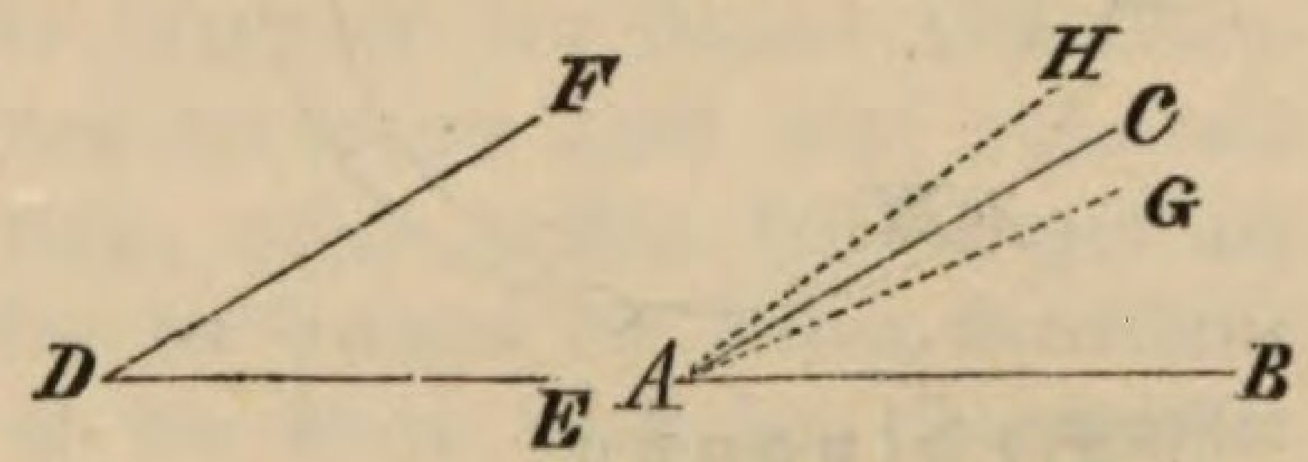
Zusatz. Wäre AB ≷ CD, etwa AB > CD, so fiele der Punkt B über D hinaus, in die Verlängerung von CD, während, wenn AB < CD der Punkt B auf CD selbst, nämlich zwischen C und D fiele. Mithin läßt sich jede kleinere Linie auf einer größeren abtragen.

§. 23.

Lehrsatz I. Winkel, die gleich groß sind, müssen, gehörig auf einander gelegt, sich decken und

II. Winkel, die einander decken, sind gleich groß. (Fig. 22.)

Fig. 22.



Bedingung.	Behauptung.
I. ∠ BAC = ∠ EDF.	I. ∠ BAC ≌ ∠ EDF.
II. ∠ BAC ∠ ≌ EDF.	II. ∠ BAC = ∠ EDF.

Beweis I. Legt man in Gedanken den Winkel EDF so auf den Winkel BAC, daß der Scheitel D auf den Scheitel A und der Schenkel DE in die Richtung des Schenkels AB fällt, so muß der Schenkel DF in die Richtung des Schenkels AC fallen. Denn wäre dieses nicht der Fall, so müßte DF entweder in die Ebene des Winkels BAC hinein, etwa wie AG, oder über sie hinaus, etwa wie AH, fallen. Im ersten Falle wäre offenbar ∠ EDF < ∠ BAC und im zweiten Falle ∠ EDF > ∠ BAC; also in beiden Fällen gegen die Bedingung. Daher muß nothwendigerweise der Schenkel DF auf den Schenkel AC fallen; folglich decken sich die beiden Winkel.

II. Decken sich aber zwei Winkel, so haben ihre Schenkel auch die nämliche Neigung zu einander, oder die Größe der Winkel ist dieselbe, also sind sie einander gleich.

Zusatz. Also decken sich alle rechten Winkel, denn diese sind alle einander gleich.

§. 24.

Lehrsatz I. Kreise, die mit demselben Halbmesser gezogen sind, müssen, gehörig auf einander gelegt, sich decken.

II. Kreise, die einander decken, haben gleiche Halbmesser. (Fig. 23.)

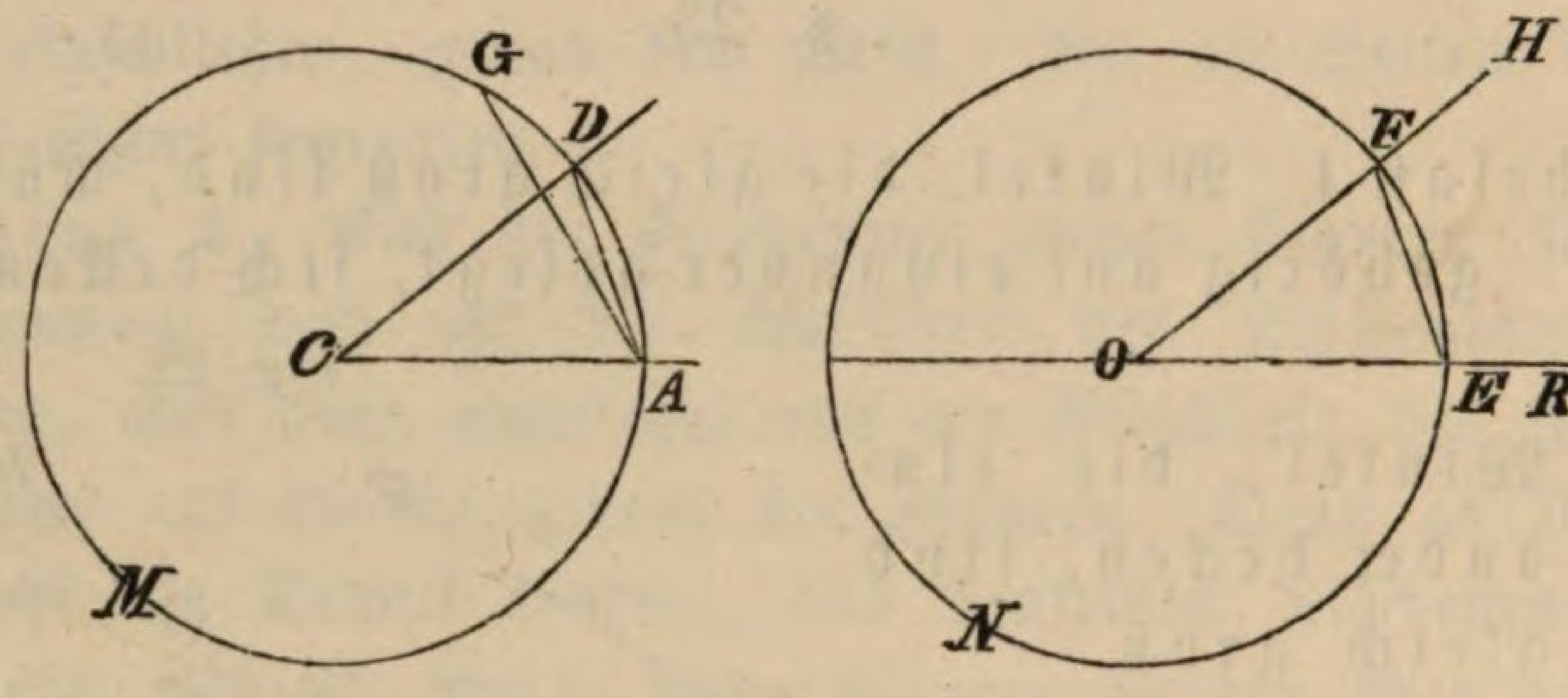


Fig. 23.

Bedingung.	Behauptung.
I. CA = OE.	I. Kreis M ≌ Kreis N.
II. Kreis M ≌ Kreis N.	II. CA = OE.

Beweis I. Legt man den Kreis M so auf den Kreis N, daß der Mittelpunkt C auf den Mittelpunkt O zu liegen kommt, so fallen entweder die Peripherien auf einander oder nicht. Fielen die Peripherien nicht auf einander, so hätten die Kreise verschiedene Halbmesser; dieses ist aber gegen die Bedingung, folglich müssen die Peripherien auf einander fallen und sich decken.

II. Decken sich aber die Kreise M und N, so müssen auch ihre Mittelpunkte auf einander fallen, folglich CA = OE seyn.

Zusatz. Also sind Kreise, die mit demselben Halbmesser gezogen sind, einander gleich, und gleiche Kreise haben gleiche Halbmesser und gleiche Durchmesser.

§. 25.

Lehrsatz. Der Durchmesser theilt den Kreis sowohl hinsichtlich seines Flächenraums, als auch hinsichtlich seiner Peripherie, in zwei gleiche Theile. (Fig. 20.)

Bedingung. AD ein Durchmesser. | Behauptung. ADGA ≌ ADFA.

Beweis. Denkt man sich die Kreisfläche durch den Durchmesser AD in zwei Theile getheilt, und man legt den einen Theil ADGA so auf den andern Theil ADFA, daß die Endpunkte des Durchmessers unverrückt bleiben, so fällt der Bogen AGD auf den Bogen AFD, oder nicht. Im ersten Fall ist der Lehrsatz erwiesen. Angenommen aber, diese Bogen fielen nicht auf einander, so kann nur zweierlei möglich seyn; erstens: der Bogen AGD fällt innerhalb des Bogens AFD, oder zweitens außerhalb desselben. Fiele er innerhalb, etwa wie AE′D, so ziehe man durch E′ den Halbmesser BC, so ist CB=CE (§. 19. Z. 2.); aber auch CE=CE′, folglich CB=CE′, was unmöglich ist. Daher kann Bogen AGD nicht innerhalb des Bogens AFD fallen. Eben so läßt sich zeigen, daß der Bogen AGD nicht außerhalb des Bogens AFD fallen kann; daher müssen beide Bogen auf einander fallen, mithin fallen die Grenzen der beiden Kreistheile aufeinander und folglich ist der Kreis durch den Durchmesser auf die oben behauptete Art halbirt.

Zusatz 1. Wird der Durchmesser AD von einem andern Durchmesser FG senkrecht durchschnitten, so wird der Kreis in vier congruente Theile getheilt.

Zusatz 2. Jede Sehne AE, die kein Durchmesser ist, theilt den Kreis in zwei ungleiche Theile (Abschnitte). Der größere Abschnitt ist derjenige, in welchem der Mittelpunkt liegt.

Denn man darf nur den Durchmesser AD ziehen, so ist ADFA = ADGA; folglich offenbar AEDFA > AEGA.

§. 26.

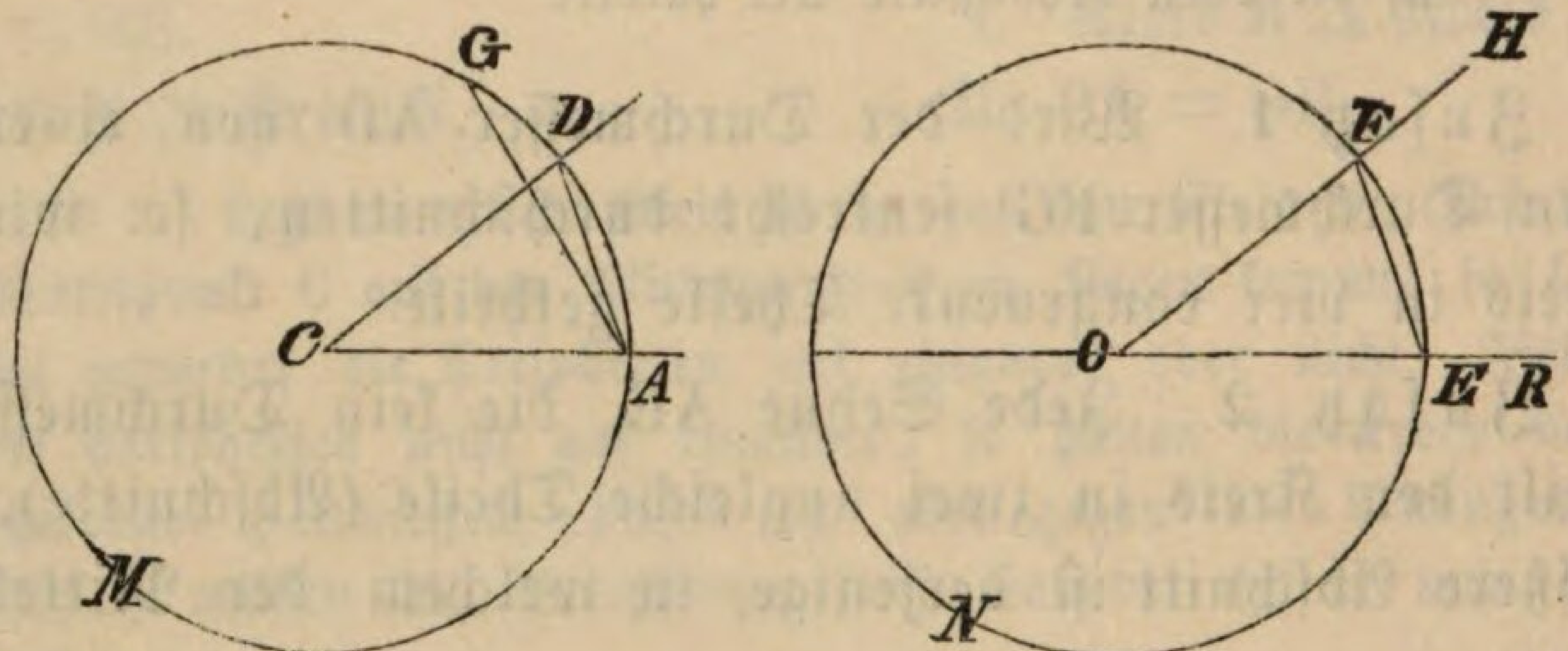
Erklärung. Jeder der zwei congruenten Theile, in welche der Durchmesser den Kreis theilt (§. 25.), heißt Halbkreis und jeder der vier congruenten Theile, in welche zwei aufeinander senkrecht stehende Durchmesser den Kreis theilen (§. 25. Z. 1), heißt Quadrant. Jeder Peripherie-Winkel DEA, dessen Schenkel in den Endpunk-

ten eines Durchmessers aufstehen, wird der **Winkel im Halbkreis** genannt, während jeder andere Peripheriewinkel, dessen Schenkel die Endpunkte einer Sehne, die kein Durchmesser ist, treffen, der **Winkel im (Kreis-) Abschnitt** heißt und zufolge (§. 25. Z. 2.) unterscheidet man noch den Winkel im größern Abschnitt von dem Winkel im kleinern Abschnitt.

§. 27.

Lehrsatz. Wenn man um die Scheitel C und O zweier gleicher Winkel ACD und EOF mit einem beliebigen Halbmesser zwei Kreise beschreibt, so sind die Bogen AD und EF, die zwischen den Schenkeln dieser Winkel liegen, congruent. (Fig. 23.)

Fig. 23.



Bedingung.
Winkel ACD = Winkel EOF
AC = OE.

Behauptung.
Bogen AD ≅ Bogen EF.

Beweis. Legt man den Kreis M so auf den Kreis N, daß ihre Mittelpunkte C und O auf einander fallen, so decken sich die Peripherien beider Kreise, weil AC=OE (§. 24. I.) Bringt man nun den Kreis M zugleich in die Lage, daß AC in die Richtung von OE fällt, so muß auch CD und OF in derselben Richtung liegen (§. 23.); folglich müssen auch die Durchschnittspunkte A und E, so wie D und F einander decken, oder die Bogen AD und EF congruent seyn.

Zusatz 1. Zu gleichen Centriwinkeln in zwei gleichen Kreisen, oder in einem und demselben Kreise gehören also gleiche Bogen und umgekehrt. In zwei gleichen Kreisen, oder in einem und demselben Kreise gehören zu congruenten Bogen gleiche Centriwinkel.

Denn decken sich die Peripherien der Kreise M und N und auch die Bogen AD und EF, so müssen auch die Geraden CA und OE, so wie CD und OF auf einander fallen.

Zusatz 2. Zieht man AD und EF, so ist auch klar, daß in gleichen Kreisen, also auch in einem und demselben Kreise zu zwei gleichen Bogen zwei gleiche Sehnen gehören, und umgekehrt: Zu gleichen Sehnen gehören in gleichen Kreisen, also auch in demselben Kreise, gleiche Bogen.

Denn ist Sehne AD = Sehne EF, und man legt die beiden gleichen Kreise M und N, wie im Beweis des Lehrsatzes angegeben, auf einander und es fällt EF auf AD, so decken sich auch die Bogen AD und EF. Fiele aber EF nicht auf AD, sondern EF fiele auf AG, so würden zu ungleichen Bogen AG und AD gleiche Sehnen gehören, was dem ersten Theil dieses Zusatzes widerspricht.

Zusatz 3. Beschreibt man um den Scheitel C eines Winkels ACD, als um einen Mittelpunkt, mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreis, so kann der Bogen AD, den die Schenkel von der ganzen Peripherie abschneiden, als das Maß des Winkels betrachtet werden; und bringt man noch die (in §. 12.) angegebene Entstehung der verschiedenen Winkel, so wie die (im §. 19.) angegebene Beschreibung der Kreislinie mit in Erwägung, so wird jetzt ganz deutlich hervorgehen, daß in demselben Verhältniß, nach welchem die Winkel wachsen, auch die Kreisbogen zunehmen, und daß, wenn der Punkt A in seinen vorigen Ort zurückgekehrt ist, dieser die Peripherie des Kreises, so wie die Linie AC nach einander Winkel gebildet hat, deren Summe gleich 4R ist. Ist demnach der Bogen AD der nte Theil der Peripherie, so ist der Winkel ACD der nte Theil von 4 rechten Winkeln.

Zusatz 4. Folglich hat der rechte Winkel den vierten Theil der Peripherie: der gestreckte die halbe Peripherie; der hohle Winkel einen Bogen, der kleiner als die halbe Peripherie und der erhabene Winkel einen Bogen, der größer als die halbe Peripherie ist, zum Maß. Die ganze Peripherie ist das Maß für 4 rechte Winkel.

§. 28.

Willkürlicher Satz. Man theilt die ganze Peripherie des Kreises in 360 gleiche Theile (Grade), jeden Grad in 60 gleiche Theile (Minuten), jede Minute wieder in 60 gleiche Theile (Secunden) u. s. w. ein. Ist ein Bogen $AD = 36$ Grad 34 Minuten 15 Secunden, so wird solches also bezeichnet: $36^0\ 34'\ 15''$.

Zusatz. Also ist die halbe Peripherie $= 180^0$, der rechte Winkel $= 90^0$, der spitze Winkel $< 90^0$, der stumpfe Winkel $> 90^0$, der gestreckte Winkel $= 180^0$, der hohle Winkel $< 180^0$, der erhabene Winkel $> 180^0$. Complementswinkel ergänzen einander zu 90^0, Supplementswinkel zu 180^0 und Implementswinkel zu 360^0. Die Summe zweier Nebenwinkel $= 180^0$. Alle Winkel, die um einen Punkt gebildet werden können und auf einer Seite einer Geraden in einer Ebene liegen, $= 180^0$ und die Summe aller Winkel, die um einen Punkt in einer Ebene herumliegen $= 360^0 =$ der ganzen Peripherie und es ist klar, daß dieser Punkt hier weiter nichts anderes, als den Mittelpunkt eines Kreises vorstellt.

Anmerkung. Die französischen Mathematiker theilen die Peripherie des Kreises in 400 gleiche Theile ein.

§. 29.

Aufgabe. Einen gegebenen Winkel ACD an einen gegebenen Punkt O der Geraden OR zu tragen. (Fig. 23.)

Auflösung. Mit einem beliebigen Halbmesser AC beschreibe man um den Scheitel C des gegebenen Winkels einen Kreis M und mit demselben Halbmesser AC = OE um den gegebenen Punkt O einen zweiten Kreis N; ferner ziehe man AD und durchschneide die Peripherie des Kreises N mit einem Halbmesser AD von E aus in F; ziehe OH durch F, so ist ∠ ROH = ∠ ACD.

Beweis. Man ziehe EF und AD, so ist EF = AD; folglich auch Bogen EF = Bogen AD (§. 27. Z. 2.), daher ∠ ROH = ∠ ACD. (§. 27. Z. 1.)

Anmerkung. Es ist nicht nothwendig, die Kreise um C und O ganz zu beschreiben. Zur Zeichnung ist hinreichend der Bogen AD und um O ein Bogen, der RO in E schneidet und etwas größer ist als AD.

§. 30.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt G eine Parallele zur gegebenen Geraden CD zu ziehen. (Fig. 15.)

Auflösung. Man ziehe durch G irgend eine Gerade EF, welche CD in einem beliebigen Punkt H schneidet und construire jetzt (nach §. 29.) entweder ∠ BGF = ∠ DHF oder ∠ EGB = ∠ EHD oder ∠ BGH = ∠ CHG.

Beweis. Ist ∠ BGF = ∠ DHF, so ist AB || CD. (§. 15.)

§. 31.

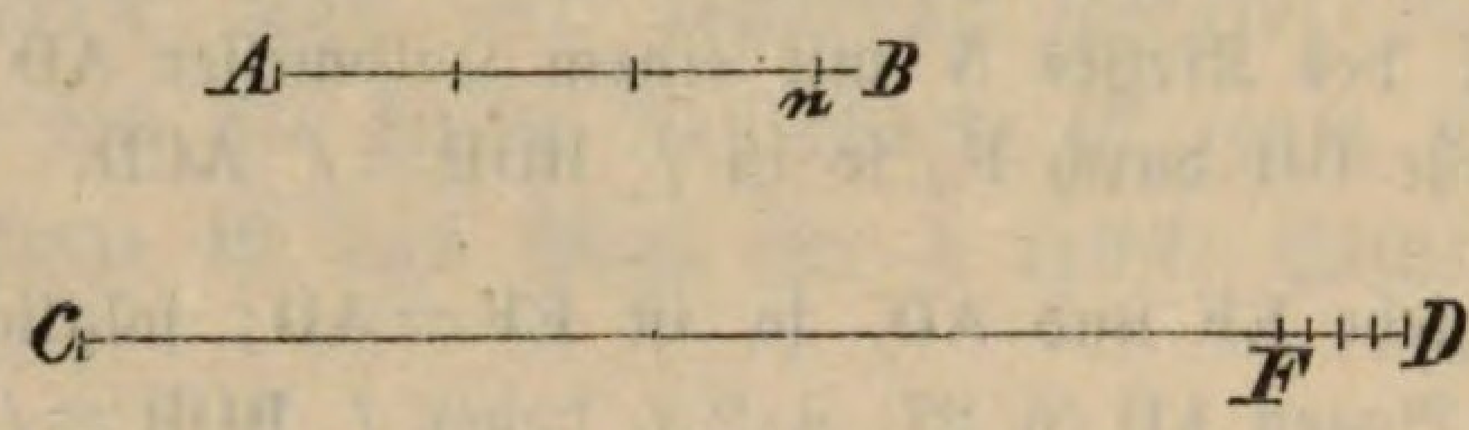
Erklärung. Eine Größe messen heißt untersuchen, wie oft eine andere bekannte gleichartige Größe in derselben enthalten ist. Diese bekannte Größe, mit welcher die andere gemessen wird, heißt das Maß oder die Einheit. Sind zwei oder mehrere Größen mit demselben Maß gemessen worden, so heißt dieses das gemeinschaftliche Maß.

Zusatz. Also können Linien nur durch Linien, Flächen nur durch Flächen, Körper nur durch Körper gemessen werden.

§. 32.

Aufgabe. Zwischen zwei gegebenen Geraden AB und CD das gemeinschaftliche Maß und ihr Verhältniß zu einander zu bestimmen. (Fig. 24.)

Fig. 24.



Auflösung. Man trage die kleinere Linie AB so oft auf der größern CD ab, als es angeht, z. B. hier 2mal, bleibt kein Rest, so ist AB selbst das gemeinschaftliche Maß, und es ist $CD = 2AB$, daher $CD : AB = 2 : 1$.

Bliebe aber ein Rest, etwa FD, so trage man diesen Rest FD so oft auf AB ab, als es angeht, z. B. hier 3mal; bleibt kein Rest, so ist FD das gemeinschaftliche Maß zwischen AB und CD, denn

$$CD = 2AB + FD$$
$$AB = 3FD$$
$$\overline{CD = 7FD}$$

d. h. FD ist in CD genau 7mal und in AB genau 3mal enthalten und es ist $CD : AB = 7FD : 3FD$
$$= 7 : 3$$

Bliebe aber, wenn FD auf AB 3mal abgetragen ist, wieder ein Rest, etwa nB, so untersuche man, wie oft nB jetzt in FD enthalten ist, und fände man, daß es genau 4mal wäre, so ist jetzt nB das gemeinschaftliche Maß der beiden gegebenen Linien AB und CD. Denn

$$CD = 2AB + FD$$
$$AB = 3FD + nB$$
$$FD = 4nB$$

so ist $AB = 12nB + nB = 13nB$
$$CD = 2AB + FD = 26nB + 4nB = 30nB$$

folglich ist nB in CD 30 und in AB 13mal genau enthalten, und es ist $CD : AB = 30nB : 13nB$
$$= 30 : 13$$

Bliebe hier aber, wenn nB auf FD abgetragen wird, wieder ein Rest, so verfahre man auf ähnliche Art weiter, bis endlich kein Rest mehr bleibt; der letztgebliebene Rest wird sodann das gemeinschaftliche Maß der beiden gegebenen Linien seyn, woraus nun auch leicht ihr Verhältniß, das rational, commensurabel heißt, sich bestimmen läßt.

Wenn aber die beiden gegebenen Linien AB und CD kein gemeinschaftliches Maß haben, so bleibt, man mag obiges Verfahren so lange fortsetzen, als man nur will, immer ein Rest, und daher läßt sich auch das Verhältniß dieser Linien nicht vollkommen genau bestimmen, oder ihr Verhältniß ist irrational, incommensurabel. Jedoch ist es nach dem in dieser Auflösung angegebenen Verfahren möglich, dem wahren Verhältniß so nahe zu kommen, als es nur immer verlangt werden kann.

Zusatz. Ist $AB = n \, . \, ab$ und $CD = m \, . \, cd$, wo AB CD, ab, cd Linien und n und m abstracte Zahlen bedeuten, so ist auch

$$AB : CD = n \, . \, ab : m \, . \, cd.$$

d. h. Gerade Linien verhalten sich, wie die Produkte aus den Maßen in die Zahlen, welche anzeigen, wie oft sie die als Einheit angenommenen Größen enthalten.

Wird aber $n = m$; so ist $AB : CD = ab : cd$, d. h. Gerade Linien, welche das Gleichvielfache ihrer Maße sind, verhalten sich, wie diese Maße selbst.

Zusatz 1. Ist $AB : CD = m : n$ und eben so $MN : PQ = m : n$. so ist auch

$$AB : CD = MN : PQ$$

d. h. Gleiche Linienverhältnisse lassen sich zu einer Proportion verbinden, und da diese Linienverhältnisse immer dem Zahlenverhältniß (m : n) gleich sind, so können mit diesen Linienproportionen dieselben Veränderungen vorgenommen werden, wie mit Zahlenproportionen und es gelten hier die nämlichen Lehrsätze, die die Arithmetik über Verhältnisse und Proportionen lehrt.

Zusatz 2. Das nämliche, was so eben von den Linienverhältnissen und Linienproportionen gesagt wurde, gilt auch von den Verhältnissen und Proportionen der Flächen und Körper; denn alle diese Verhältnisse können auf Zahlenverhältnisse zurückgeführt und eben so behandelt werden, wie Verhältnisse abstracter Zahlen.

§. 33.

Erklärung. Zwei Figuren heißen einander ähnlich, wenn sie alle Winkel nach einer bestimmten Ordnung gleich haben, und die Seiten, die die gleichen Winkel einschließen, in derselben Ordnung einander proportionirt sind. So ist z. B. (Fig. 114 a. Seite 147.) ABCDE... ähnlich abcde..., wenn $\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$, $\angle C = c$, $\angle D = \angle d$.. und $AB : BC = ab : bc$, $AB : AC = ab : ac$ und $AC : BC = ac : bc$ u. s. w. Statt findet.

Die Punkte A, a; B, b; C, c; D, d; u. s. w. heißen homologe Ecken, daher die Seiten und Diagonalen, welche homologe Ecken verbinden, homolog genannt werden.

Anmerkung. Das Zeichen der Aehnlichkeit ist $\sim$ (similis) z. B. $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

Zweiter Abschnitt.

D i e D r e i e c k e.

A. Congruenz der Dreiecke.

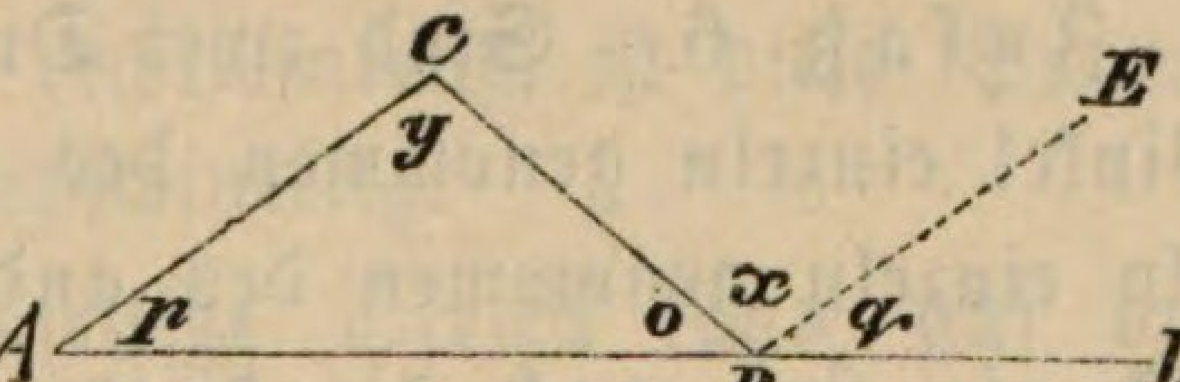
§. 34.

Erklärung. Wird in einem Dreieck irgend eine Seite verlängert, so entsteht ein Winkel, welcher der Außenwinkel genannt wird. Der Winkel im Dreieck, welcher sein Supplement ist, ist sein anliegender, während die beiden andern die ihm gegenüberliegenden Winkel heißen.

§. 35.

Lehrsatz. In jedem Dreieck ist der Außenwinkel gleich der Summe der beiden innern ihm gegenüberliegenden Winkel. (Fig. 24. a.)

Fig. 24. a.



Bedingung.	Behauptung.
Irgend eine Seite z. B. AB ist verlängert.	$\angle CBD = \angle CAB + \angle BCA$.

Beweis. Durch den Scheitel B des Außenwinkels CBD lege man BE || AC (§. 30.), so ist

$$q = p,$$
$$x = y, \quad (§. 16.)$$
$$\overline{}$$
$$q + x = p + y,$$

oder $\angle CBD = \angle CAB + \angle BCA$ (W. z. E.)

Zusatz 1. Der Außenwinkel ist also immer größer, als ein ihm gegenüberliegender innerer Winkel.

Zusatz 2. Addirt man auf beiden Seiten der Gleichung

$$\angle CBD = \angle CAB + \angle BCA$$

den Winkel CBA, so hat man

$$\angle CBD + \angle CBA = \angle CAB + \angle BCA + \angle CBA$$

Weil aber $\angle CBD + \angle CBA = 2R$ (§. 7.)

so folgt $\angle CAB + \angle BCA + \angle CBA = 2R$

der höchst wichtige Satz: In jedem Dreieck ist die Summe der drei innern Winkel gleich zweien Rechten.

Zusatz 3. Daher ist die Summe zweier innerer Winkel im Dreieck immer kleiner, als zwei Rechte.

Zusatz 4. Daher hat jedes Dreieck entweder einen rechten und zwei spitze oder einen stumpfen und zwei spitze oder drei spitze Winkel.

Zusatz 5. Ist in einem Dreieck die Summe zweier Winkel bekannt, so ist auch der dritte Winkel bekannt und ist in einem Dreieck ein Winkel gegeben, so ist auch die Summe der beiden andern mitgegeben.

Zusatz 6. Sind zwei Dreiecke so beschaffen, daß zwei Winkel einzeln genommen des einen Dreiecks zweien Winkeln einzeln genommen des andern Dreiecks einander gleich sind, so sind auch die dritten Winkel einzeln genommen einander gleich.

§ 36.

Erklärung. Die Dreiecke werden eingetheilt:

a) hinsichtlich ihrer Seiten:

in gleichseitige, die drei gleiche Seiten,
in gleichschenkelige, die zwei gleiche Seiten, und
in ungleichseitige, die keine gleichen Seiten haben.

Im gleichschenkeligen Dreieck werden die beiden gleichen

Seiten Schenkel und die dritte Seite Grundlinie und vorzugsweise der Durchschnittspunkt der beiden Schenkel Spitze, so wie der Winkel, den die beiden Schenkel einschließen, der Winkel an der Spitze genannt.

b) hinsichtlich ihrer Winkel:

in rechtwinkelige, die einen rechten und zwei spitze Winkel,

in stumpfwinkelige, die einen stumpfen und zwei spitze Winkel, und

in spitzwinkelige, die drei spitze Winkel haben (§. 35. Zusatz 4.)

Im rechtwinkeligen Dreieck werden die zwei Seiten, welche den rechten Winkel einschließen und also senkrecht auf einander stehen, die Katheten und die dritte Seite, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, Hypotenuse genannt.

Zusatz 1. Im rechtwinkeligen Dreieck ist die Summe der beiden spitzen Winkel = R. Ist daher ein spitzer Winkel bekannt, so ist es auch der andere und folglich die drei Winkel eines solchen Dreiecks.

Zusatz 2. Ist die Summe zweier Winkel eines Dreiecks = R, so ist das Dreieck rechtwinkelig, ist diese Summe $<$R, so ist das Dreieck stumpfwinkelig.

Zusatz 3. Jedes gleichseitige Dreieck kann auf drei verschiedene Arten als ein gleichschenkeliges (wenn man nämlich jede der drei Seiten als Grundlinie gelten läßt) betrachtet werden, aber nicht einmal umgekehrt.

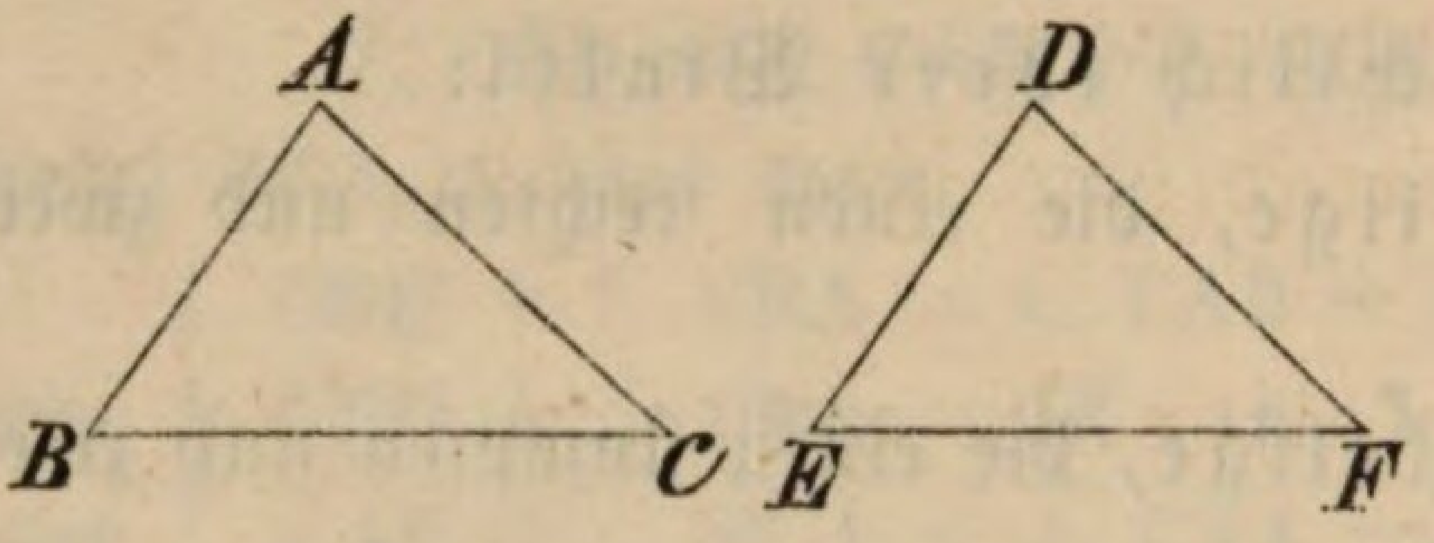
§. 37.

Grundsatz. In congruenten Dreiecken liegen den gleichen Seiten die gleichen Winkel und den gleichen Winkeln auch die gleichen Seiten gegenüber.

§. 38.

Lehrsatz. Wenn zwei Dreiecke bezüglich zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich haben, so sind beide Dreiecke congruent. (Fig. 25.)

Fig. 25.



Bedingung.
AB = DE
BC = EF
∠ ABC = ∠ DEF.

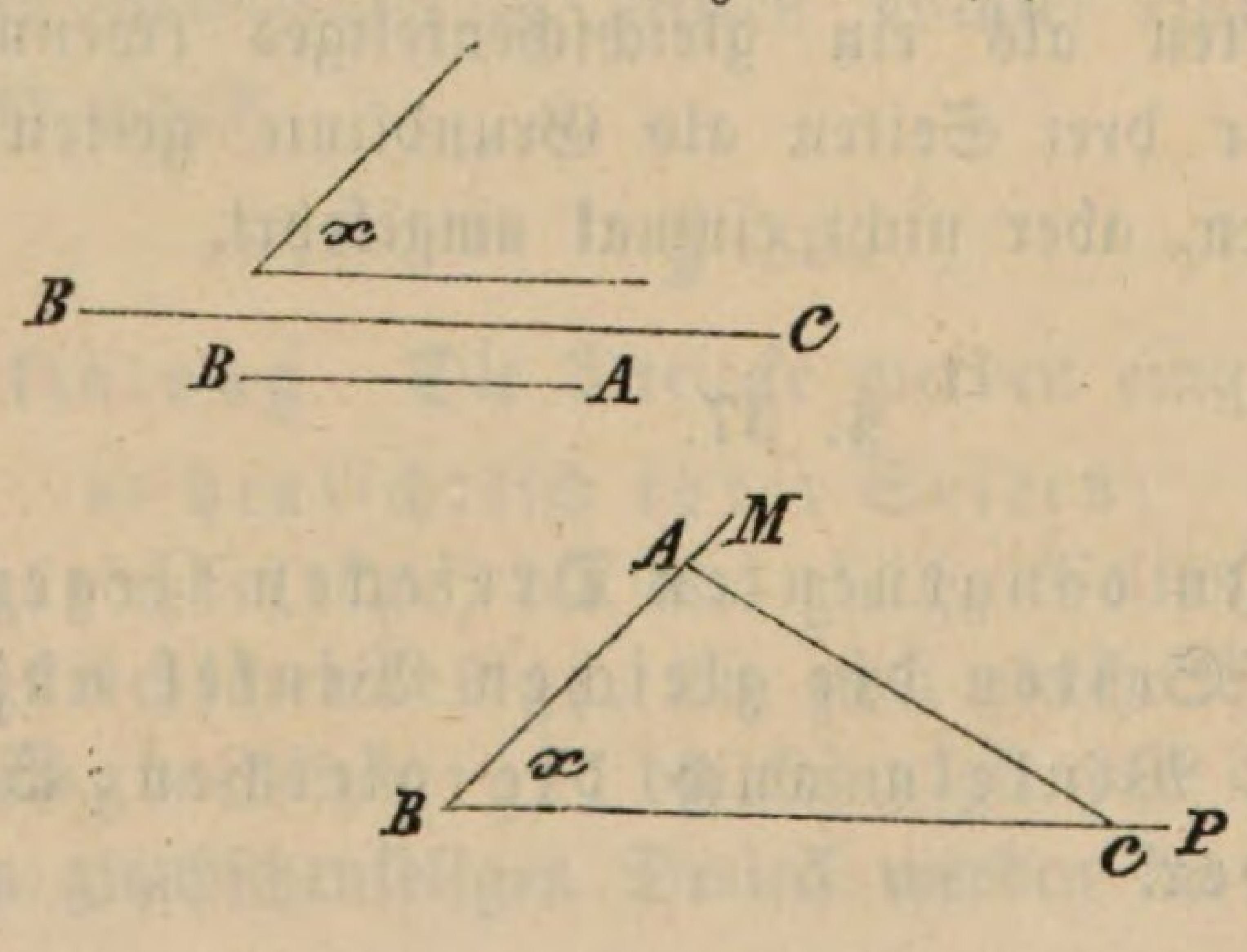
Behauptung.
△ ABC ≅ △ DEF.

Beweis. Man nehme in Gedanken das Dreieck DEF und lege es so auf das Dreieck ABC, daß der Punkt E auf den Punkt B, die Linie EF in die Richtung von BC, und D auf die nämliche Seite von BC wie A fällt, so müssen auch, da BC = EF (V. D. B.), diese Linien einander decken (§. 22.), also der Punkt F auf den Punkt C fallen; weil ferner ∠ DEF = ∠ ABC (V. D. B.), so muß die Linie ED in die Richtung von BA (§. 23.), und da zugleich AB = DE (V. D. B.) ist, auch der Punkt D auf den Punkt A fallen. Da nun F auf C, D auf A liegt, so deckt auch die Linie DF die Linie AC (§. 1. Z. 2.), folglich fallen alle Grenzen der beiden Dreiecke auf einander und diese sind mithin congruent. (§. 21.)

§. 39.

Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren, wenn zwei Seiten nebst der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben ist.

Fig. 26.



Auflösung. Man construire (Fig. 26.) einen Winkel MBP, der

dem gegebenen Winkel x gleich ist (§. 29.), und trage vom Scheitel B aus auf BP die Linie BC = der gegebenen Seite BC sowie auf BM die Linie BA = der gegebenen Seite AB ab und ziehe AC, so ist △ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Es hat die verlangten drei Stücke.

Zusatz. Also ist ein Dreieck durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel vollkommen bestimmt, und es läßt sich also mit diesen drei Bestimmungsstücken nur ein Dreieck construiren, obwohl dasselbe verschiedene Lagen haben kann.

§. 40.

Lehrsatz. Wenn zwei Dreiecke bezüglich eine Seite und zwei Winkel gleich haben, so sind die beiden Dreiecke congruent. (Fig. 25.)

Dieser Lehrsatz läßt hinsichtlich der zwei gegebenen Winkel zwei verschiedene Fälle zu, nämlich

Erster Fall. Die beiden gegebenen Winkel liegen der gegebenen Seite an, oder

Zweiter Fall. Einer der gegebenen Winkel liegt der gegebenen Seite an, der andere aber ihr gegenüber.

Erster Fall.

Bedingung.	Behauptung.
BC = EF	△ABC ≅ △DEF.
∠ABC = ∠DEF	
∠ACB = ∠DFE.	

Beweis. Man lege in Gedanken das Dreieck DEF so auf das Dreieck ABC, daß die beiden gleichen Geraden BC und EF sich decken, und D auf die nämliche Seite von BC, wie A fällt, so muß, weil ∠ABC = ∠DEF, die Gerade DE in die Richtung von AB und weil ∠ACB = ∠DFE, auch FD in die Richtung von CA fallen (§. 23.). Der beiden Seiten DE und DF gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt D muß daher auch auf den, den beiden Seiten AB und AC gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt A fallen, folglich deckt auch DE und AB, so wie DF und AC einander, mithin sind beide Dreiecke congruent.

Zweiter Fall.

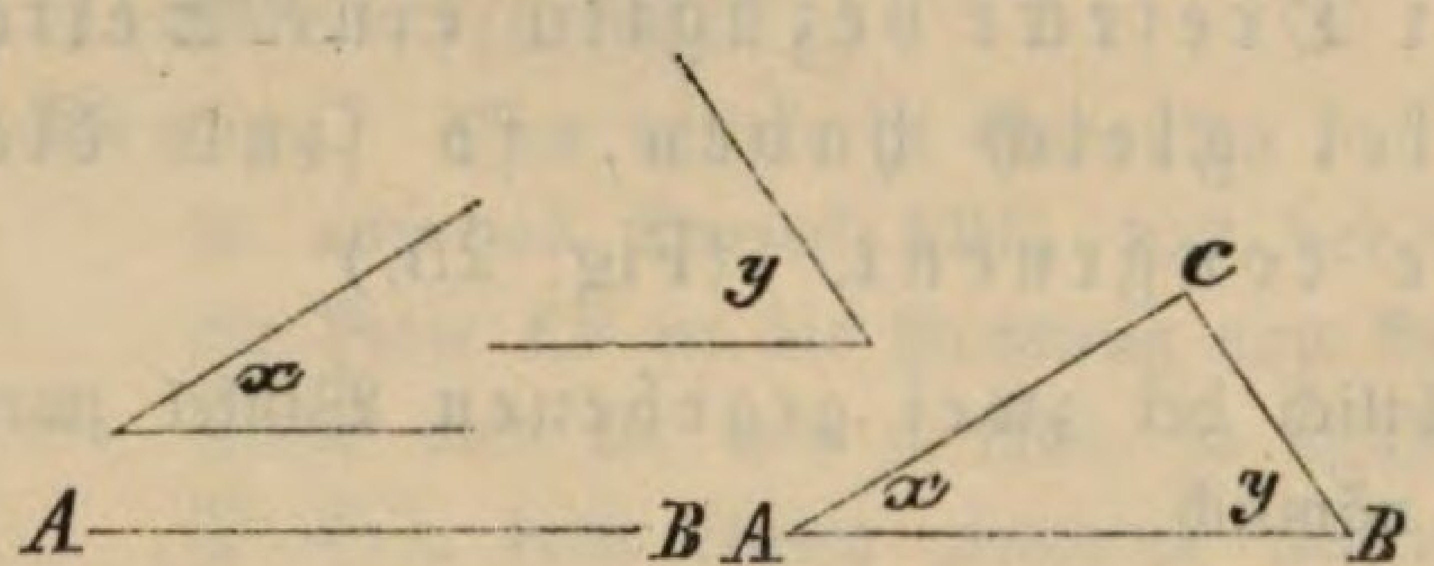
Bedingung.	Behauptung.
BC = EF	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
$\angle ABC = \angle DEF$	
$\angle BAC = \angle EDF$.	

Beweis. Nach §. 35. Z. 6. ist auch $\angle ACB = \angle DFE$, folglich ganz der erste Fall.

§. 41.

Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Seite und zwei Winkel gegeben sind.

Fig. 26. a.



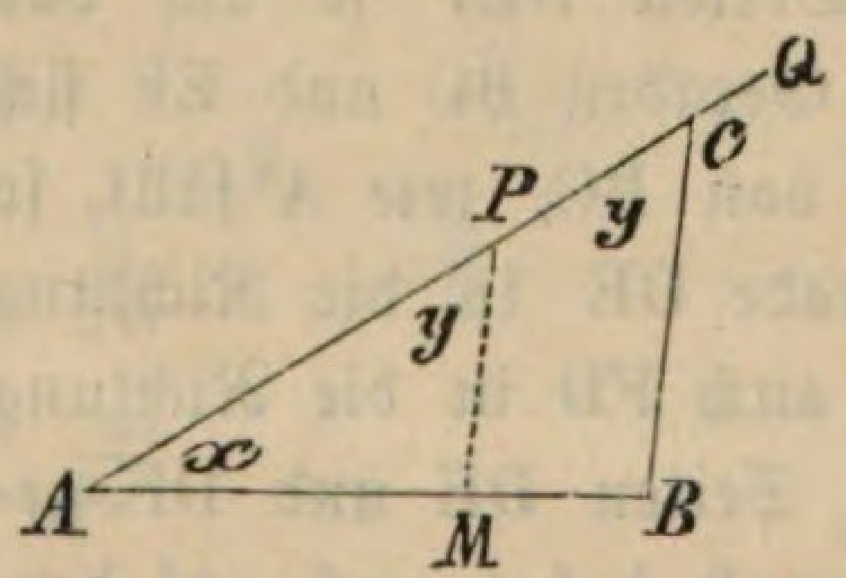
Auflösung. Erster Fall. Die gegebene Seite sey AB und x und y die beiden gegebenen Winkel, die dieser Seite anliegen sollen. (Fig. 26. a.)

In dem Endpunkte A der Linie AB construire man (§. 29.) $\angle BAC = x$ und im andern Endpunkte B den Winkel $CBA = y$; lege die Schenkel dieser Winkel aber so, daß ein Durchschnitt C erfolgt, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Es hat die verlangten drei Stücke.

Ein Durchschnitt C muß aber erfolgen, wenn $x + y < 2R$ ist (§. 15. Z. 2.). Wäre aber $x + y = 2R$, oder $x + y > 2R$, so ist die Aufgabe eine unmögliche, denn die Bedingung ist gegen §. 35. Z. 3.

Fig. 26. b.



Zweiter Fall. Der Winkel x soll der AB anliegen, y aber gegenüberstehen. (Fig. 26. b.)

Man construire (§. 29.) $\angle BAQ = x$; mache AB = der gegebenen Seite; in einem beliebigen Punkt P der AQ construire man $\angle APM = y$, und ziehe $CB \parallel PM$ (§. 30.), so ist ABC das verlangte Dreieck.

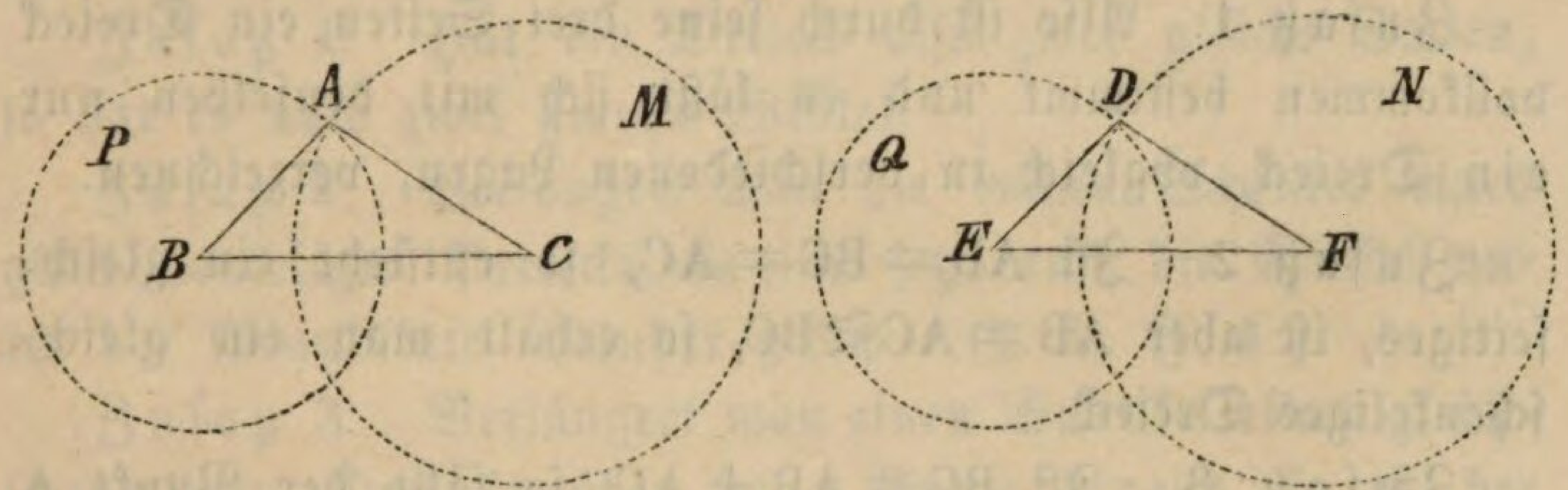
Beweis. $\angle APM = \angle ACB$ (§. 16.) $= y$.

Zusatz. Also ist ein Dreieck vollkommen durch eine Seite und zwei Winkel bestimmt, wenn diese zwei Winkel zusammen genommen $< 2R$ sind, und mit diesen drei Bestimmungsstücken läßt sich nur ein Dreieck construiren, welches gleichwohl verschiedene Lagen haben kann.

§. 42.

Lehrsatz. Wenn zwei Dreiecke bezüglich alle drei Seiten gleich haben, so sind beide Dreiecke congruent. (Fig. 27.)

Fig. 27.



Bedingung.	**Behauptung.**
AB = DE	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
AC = DF	
BC = EF.	

Beweis. Man beschreibe um B und um E, als um zwei Mittelpunkte mit den gleichen Halbmessern AB, DE die zwei Kreise P und Q; ferner eben so um C und F mit den gleichen Halbmessern AC, DF die Kreise M und N. Nimmt man nun das Dreieck DEF mit seinen zwei Kreisen Q und N und legt es so auf das Dreieck ABC, daß die beiden gleichen Geraden BC und EF sich decken, und D auf dieselbe Seite von BC wie A fällt, also der Mittelpunkt E des Kreises Q auf den Mittelpunkt B des Kreises P und der Mittelpunkt F des Kreises N auf den Mittelpunkt C des Kreises M zu liegen kommt, so müssen die Kreise P und Q, so wie die Kreise M und N sich decken (§. 24.). Weil nun die Peripherien der Kreise sich decken, so fallen auch ihre Durchschnittspunkte D und A aufeinander, also decken sich auch die Geraden DE und AB, so wie DF und AC, folglich sind die beiden Dreiecke ABC und DEF congruent.

§. 43.

Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren, wenn dessen drei Seiten gegeben sind. (Fig. 27.)

Auflösung. Aus dem einen Endpunkt B der einen gegebenen Seite BC beschreibe man mit einem Halbmesser BA = der andern gegebenen Seite den Kreis P und aus dem andern Endpunkt C mit einem Halbmesser CA = der dritten gegebenen Seite den Kreis M; erfolgt ein Durchschnitt A, so ziehe AB und AC, und ABC ist das verlangte Dreieck.

Beweis. Es hat die verlangten drei Seiten.

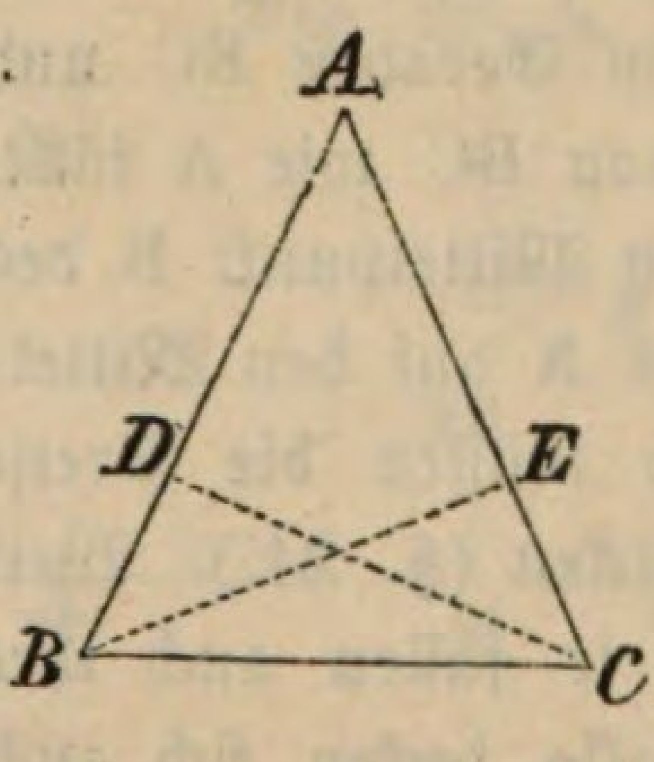
Zusatz 1. Also ist durch seine drei Seiten ein Dreieck vollkommen bestimmt und es läßt sich mit denselben nur ein Dreieck, obgleich in verschiedenen Lagen, verzeichnen.

Zusatz 2. Ist $AB = BC = AC$, so entsteht ein gleichseitiges, ist aber $AB = AC \gtrless BC$, so erhält man ein gleichschenkeliges Dreieck.

Zusatz 3. Ist $BC = AB + AC$, so fällt der Punkt A auf BC und ist $BC > AB + AC$, so erfolgt kein Durchschnitt der Kreise M und P; mithin entsteht in beiden Fällen kein Dreieck. Die Aufgabe aus drei gegebenen Seiten das Dreieck zu construiren, ist also nur dann möglich, wenn $BC < AB + AC$, oder die Summe zweier Seiten größer als die dritte ist.

§. 44.

Fig. 28.



Lehrsatz. In jedem gleichschenkeligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich. (Fig. 28.)

Bedingung. $AB = AC$.

Behauptung. $\angle ABC = \angle ACB$.

Beweis. Man mache beliebig BD = CE und ziehe CD und BE, so ist, weil AB = AC (V. D. B.), auch

AD = AE
und AC = AB
∠A = ∠A (Grundsatz 1.)
△ACD ≌ △ABE (§. 38.)

folglich ist ∠ADC = ∠AEB (§. 37.) und daher auch

∠BDC = ∠CEB (§. 9. Z. 1.)

Weil ferner DC = BE (§. 37.)
und BD = CE (V. D. C.)
△BDC ≌ △BCE (§. 38.)

folglich (§. 37.) ∠DBC = ∠ECB, oder ∠ABC = ∠ACB (W. Z. E.)

Zusatz 1. Hat ein Dreieck also zwei gleiche Seiten, so hat es auch zwei gleiche Winkel.

Zusatz 2. Verlängert man die beiden Schenkel eines gleichschenkeligen Dreiecks, so sind jetzt auch die Winkel unter der Grundlinie einander gleich. (§. 9. Z. 1.)

Zusatz 3. Verlängert man einen Schenkel eines gleichschenkeligen Dreiecks über seine Spitze hinaus, so ist der dadurch entstandene Außenwinkel doppelt so groß, als ein Winkel an der Grundlinie. (§. 35.)

Zusatz 4. Ist im gleichschenkeligen Dreieck ein Winkel bekannt, so sind die beiden andern auch bekannt. Bezeichnet man den Winkel an der Spitze mit p und jeden der beiden Winkel an der Grundlinie mit q, so ist (§. 35. Z. 2.) $p + q + q = 2R$, oder $p + 2q = 2R$; daraus folgt für den Winkel an der Spitze

$$p = 2R - 2q = 2\ (R - q)$$

und für jeden der beiden gleichen Winkel an der Grundlinie

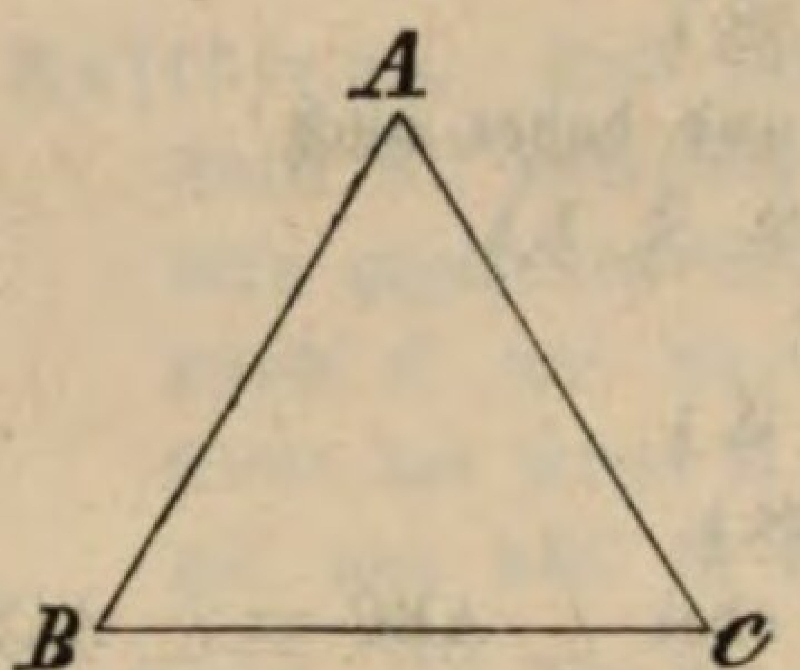
$$q = \frac{2R - p}{2} = R - \tfrac{1}{2}p;$$

daher q immer spitz.

Zusatz 5. Ist das gleichschenkelige Dreieck zugleich rechtwinkelig, so kann der rechte Winkel nur der Winkel an der Spitze seyn; und dann ist jeder der beiden gleichen spitzen

Winkel $= \frac{1}{2}R = 45^0$. Oder $q = R - \frac{1}{2}p$; nun ist in diesem Fall $p = R$, folglich $\frac{1}{2}p = \frac{1}{2}R$, mithin $q = R - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R = 45^0$.

Fig. 29.

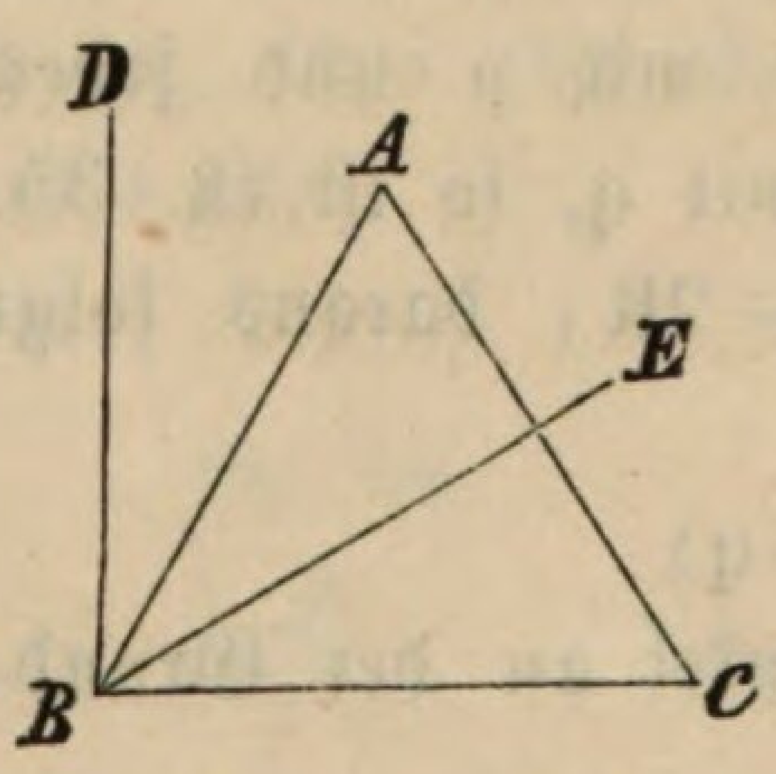


Zusatz 5. Da das gleichseitige Dreieck 3mal als ein gleichschenkeliges betrachtet werden kann (§. 36. Z. 3.), so folgt, wenn (Fig. 29.)

BC die Grundlinie vorstellt, daß $\angle B = \angle C$, wenn
AB die Grundlinie vorstellt, daß $\angle B = \angle A$, und wenn
AC die Grundlinie vorstellt, daß $\angle A = \angle C$ ist,

d. h. In jedem gleichseitigen Dreiecke sind die drei innern Winkel einander gleich, folglich jeder einzelne $= \frac{2R}{3} = 60^0$ (wenn man §. 35. Z. 2. zu Hilfe nimmt); mithin jeder spitz. Also sind alle gleichseitigen Dreiecke hinsichtlich ihrer Winkel von gleicher Beschaffenheit; daher ist das gleichseitige Dreieck eine reguläre Figur. (§. 18.)

Fig. 30.



Zusatz 7. Wenn man (Fig. 30.) über den einen Schenkel BC eines rechten Winkels DBC ein gleichseitiges Dreieck ABC beschreibt, so ist $\angle DBA = \angle DBC - \angle ABC = R - \frac{2}{3}R = \frac{1}{3}R$, und construirt man noch (§. 29.) $\angle ABE = \angle DBA$, so ist der rechte Winkel DBC durch die Geraden AB, EB in drei gleiche Theile getheilt.

§. 45.

Lehrsatz. Wenn in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich sind, so ist das Dreieck gleichschenkelig. (Fig. 28.)

Bedingung.	Behauptung.
$\angle ABC = \angle ACB$.	$AB = AC$.

Beweis: Man mache $BD = CE$, so ist weil $BC = BC$ und $\angle ABC = \angle ACB$, auch $\triangle BDC \cong \triangle CEB$ (§. 38.), daher $CD = BE$ und $\angle DCB = \angle EBC$, mithin auch $\angle ACD = \angle ABE$. In den beiden Dreiecken ACD und ABE ist daher $CD = BE$, so wie $\angle ACD = \angle ABE$, und weil noch $\angle DAE = \angle EAB$, so ist $\triangle ACD \cong \triangle ABE$, und also $AC = AB$. (W. Z. E.)

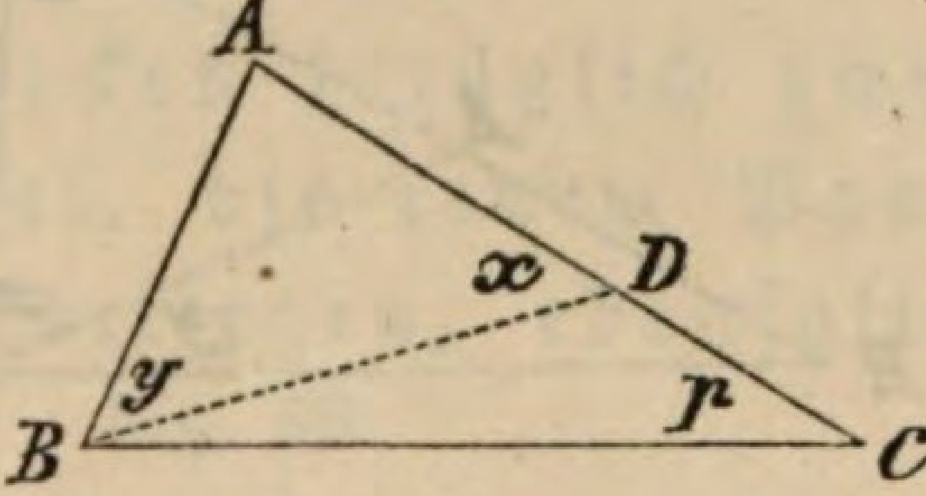
Zusatz 1. Hat ein Dreieck also zwei gleiche Winkel so hat es auch zwei gleiche Seiten.

Zusatz 2. Daher ist das gleichwinkelige Dreieck immer zugleich auch gleichseitig.

§. 46.

Lehrsatz. I. In jedem Dreieck liegt der größeren Seite auch der größere Winkel und umgekehrt II. dem größeren Winkel auch die größere Seite gegenüber. (Fig. 32.)

Fig. 32.



Bedingung.	Behauptung.
I. $AC > AB$	I. $\angle ABC > \angle ACB$
II. $\angle ABC > \angle ACB$.	II. $AC > AB$.

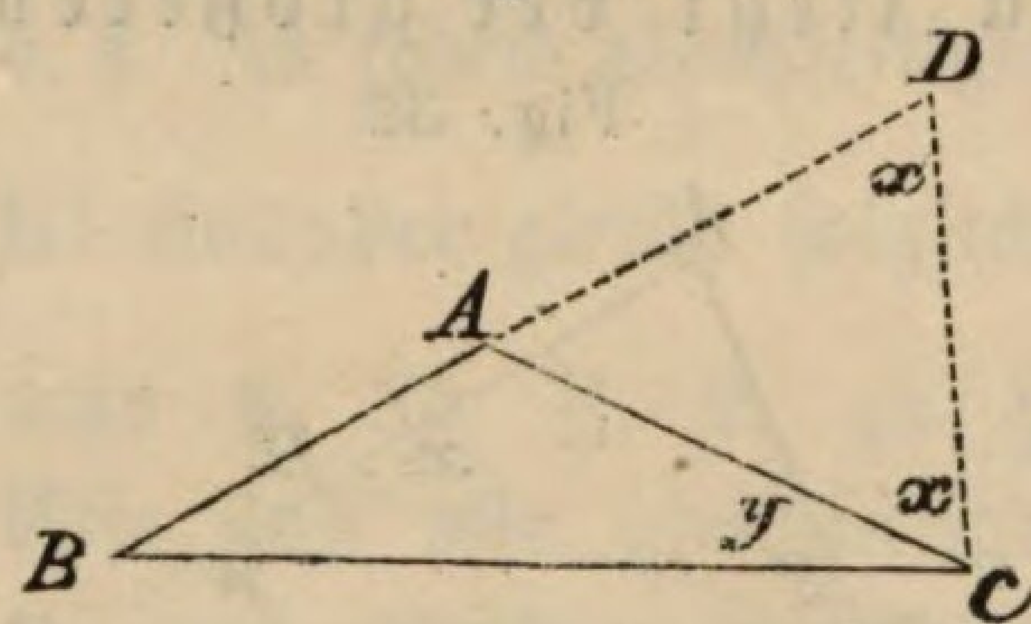
Beweis. I. Theil. Weil $AC > AB$, so sey $AD = AB$; folglich wenn man BD zieht, $x = y$ (§. 44.). Nun ist $x > p$ (§. 35. Zusatz 1), daher auch $y > p$ und um so gewisser $\angle ABC > \angle ACB$.

Beweis. II. Theil. Wäre AC nicht $> AB$, so können nur zwei Fälle Statt finden, entweder ist $AC = AB$, oder $AC < AB$. Es kann aber AC nicht $= AB$ seyn, sonst wäre $\angle ABC = \angle ACB$ (§. 44.), was offenbar gegen die Bedingung; eben so wenig kann $AC < AB$ seyn, weil (nach dem ersten Theil dieses Beweises), sonst $\angle ACB > \angle ABC$, was ebenfalls gegen die Bedingung ist; daher muß nothwendigerweise $AC > AB$ seyn.

Zusatz 1. Im rechtwinkeligen Dreieck ist daher die Hypotenuse die größere Seite, so wie im stumpfwinkeligen Dreieck diejenige Seite die größere ist, welche dem stumpfen Winkel gegenüberliegt.

Zusatz 2. Mit Zuziehung der Sätze (§§. 44, 45.) gilt nun folgender allgemeine Satz: So viel ein Dreieck gleiche Seiten hat, so viel hat es auch gleiche Winkel und so viel es gleiche Winkel hat, so viel hat es auch gleiche Seiten; hat das Dreieck ungleiche Seiten; so hat es auch ungleiche Winkel und zwar so viele ungleiche Winkel als es ungleiche Seiten hat und auch so viele ungleiche Seiten als es ungleiche Winkel hat, und allemal liegt der größeren Seite der größere Winkel und eben so dem größern Winkel die größere Seite gegenüber.

Fig. 33.



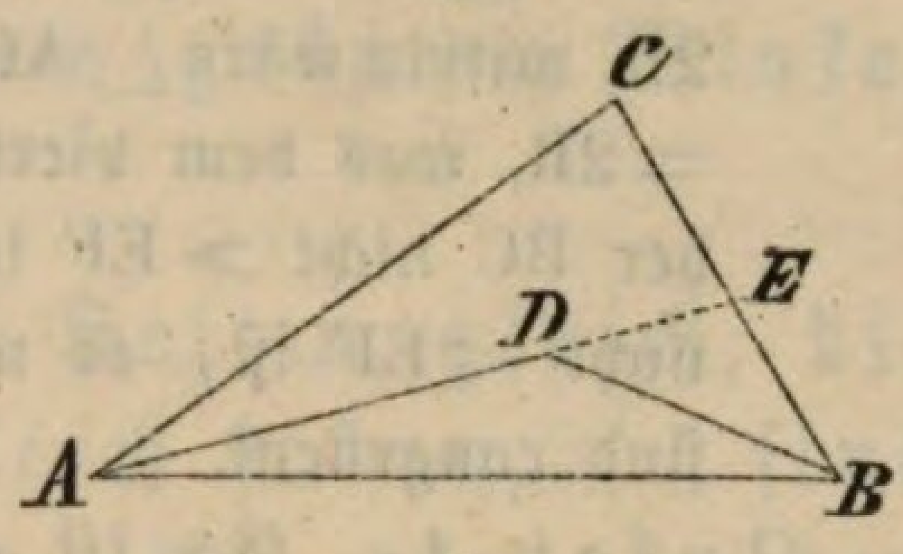
Zusatz 3. In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer, als die dritte Seite, nämlich AB + AC > BC. (Fig. 33.)

Denn ist AB = AC = BC, oder AC > BC, oder auch AB > BC, so ist der Satz für sich klar; man nehme aber AB < BC und auch AC < BC, verlängere AB bis AD = AC wird, und ziehe CD, so ist x = x (§. 44.), daher y + x > x, also auch ∠ BCD > ∠ BDC oder BD > BC d. h. AB + AD > BC und endlich AB + AC > BC.

Zusatz 4. Aus AB + AC > BC folgt AB > BC − AC und auch AC > BC − AB, d. h. die Differenz zweier Seiten in einem Dreieck ist kleiner als die dritte Seite.

Zusatz 5. Daher ist die Aufgabe (§. 43.), aus drei gegebenen Seiten das Dreieck selbst zu construiren nur dann möglich, wenn die Summe je zweier gegebener Seiten größer, als die dritte, oder wenn die Differenz je zweier gegebener Seiten kleiner, als die dritte Seite ist.

Fig. 34.



Zusatz 6. Zieht man von einem Punkt D innerhalb eines Dreiecks ABC (Fig. 34.) gerade Linien AD und DB nach den Endpunkten einer Seite AB, so sind diese Geraden zusammen kleiner, als die beiden andern Seiten des Dreiecks, schließen aber einen größeren Winkel ein.

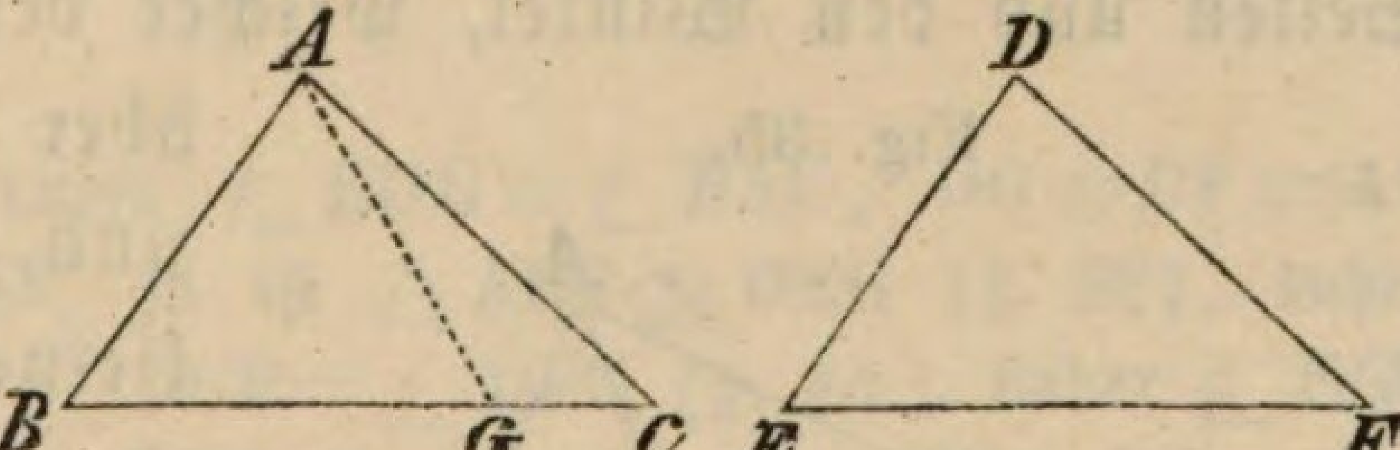
Denn wird AD bis E verlängert, so ist $\angle ADB > \angle DEB$ (§. 35. Z. 1.) und $\angle DEB > ACB$, folglich um so gewisser $\angle ADB > \angle ACB$.

Ferner ist $AC + CE > AE$
$> AD + DE$
Auch ist $DE + EB > DB$
daher $AC + CE + DE + EB > AD + DE + DB$
Mithin $AC + CB > AD + DB$.

§. 47.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken bezüglich zwei Seiten gleich, die Winkel, die einem Paar gleicher Seiten gegenüberliegen, ebenfalls gleich, die Winkel aber, die dem andern Paar gleicher Seiten gegenüberliegen, $\lessgtr 2R$ sind, so sind diese Dreiecke congruent. (Fig. 25.)

Fig. 25.



Bedingung.
$AB = DE$
$AC = DF$
$\angle B = \angle E$
$\angle C + \angle F \lessgtr 2R$.

Behauptung.
$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Beweis. Kann man erweisen, daß zugleich $BC = EF$ Statt findet, so ist der Lehrsatz erwiesen (§. 38.). Gesetzt $BC \gtrless EF$, so sey $BG > EF$, etwa $BG = EF$, so wäre, wenn man AG zieht, $\triangle ABG \cong \triangle DEF$ (§. 38.) folglich $AG = DF$ (§. 37.). Nun ist aber auch $AC = DF$ (B. D. B.), daher auch $AG = AC$, deshalb

wäre $\angle AGC = \angle ACG$ (§. 44.) Nun ist $\angle AGB + \angle AGC = 2R$, mithin wäre $\angle AGB + \angle ACB = 2R$, oder $\angle DFE + \angle ACB = 2R$, was dem vierten Theil der Bedingung widerspricht, daher BC nicht $> EF$ seyn kann. Ebenso wird erwiesen, daß BC nicht $< EF$ ist, es muß also $BC = EF$ seyn und die Dreiecke sind congruent.

Zusatz 1. Es ist aber allemal $C + F \gtrless 2R$, wenn

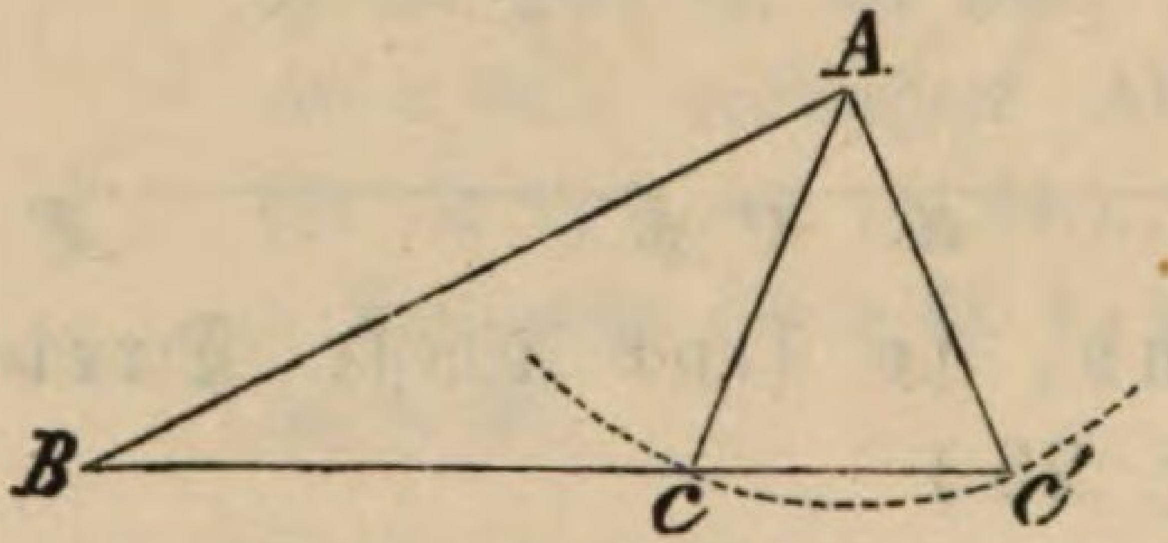
a) $B = E = R$ oder $B = E > R$

b) $B > C$ und $E > F$ zugleich Statt findet; alsdann ist aber auch $AC > AB$ und $DF > DE$, daher steckt in dem obigen allgemeinen Lehrsatz folgender besonderer: Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie bezüglich zwei Seiten und den Winkel, der einer dieser Seiten gegenüberliegt, gleich haben, dieser Winkel aber ein rechter oder ein stumpfer ist, oder, der größern gegebenen Seite gegenüber liegt.

Zusatz 2. Zwei rechtwinkelige Dreiecke sind daher congruent, wenn dieselben die Hypotenuse und eine Kathete bezüglich gleich haben.

Zusatz 3. Also ist das Dreieck bestimmt durch zwei Seiten und den Winkel, welcher der größern Seite gegenüber liegt. Aus zwei Seiten und einem Winkel, der der kleinern Seite gegenüber liegt, ist hingegen das Dreieck nicht völlig bestimmt, denn aus diesen drei Bestimmungsstücken lassen sich immer zwei Dreiecke construiren. (Fig. 35.)

Fig. 35.



Denn $\triangle ABC$ und $\triangle ABC'$ haben $AC = AC'$; $AB = AB$; $\angle B = \angle B$. Dieser zweideutige Fall tritt aber immer ein, wenn $AB > AC$ und B gegeben ist, weil mit dem Halbmesser $AC = AC'$ die Linie BC' in zwei Punkten C und C' geschnitten wird.

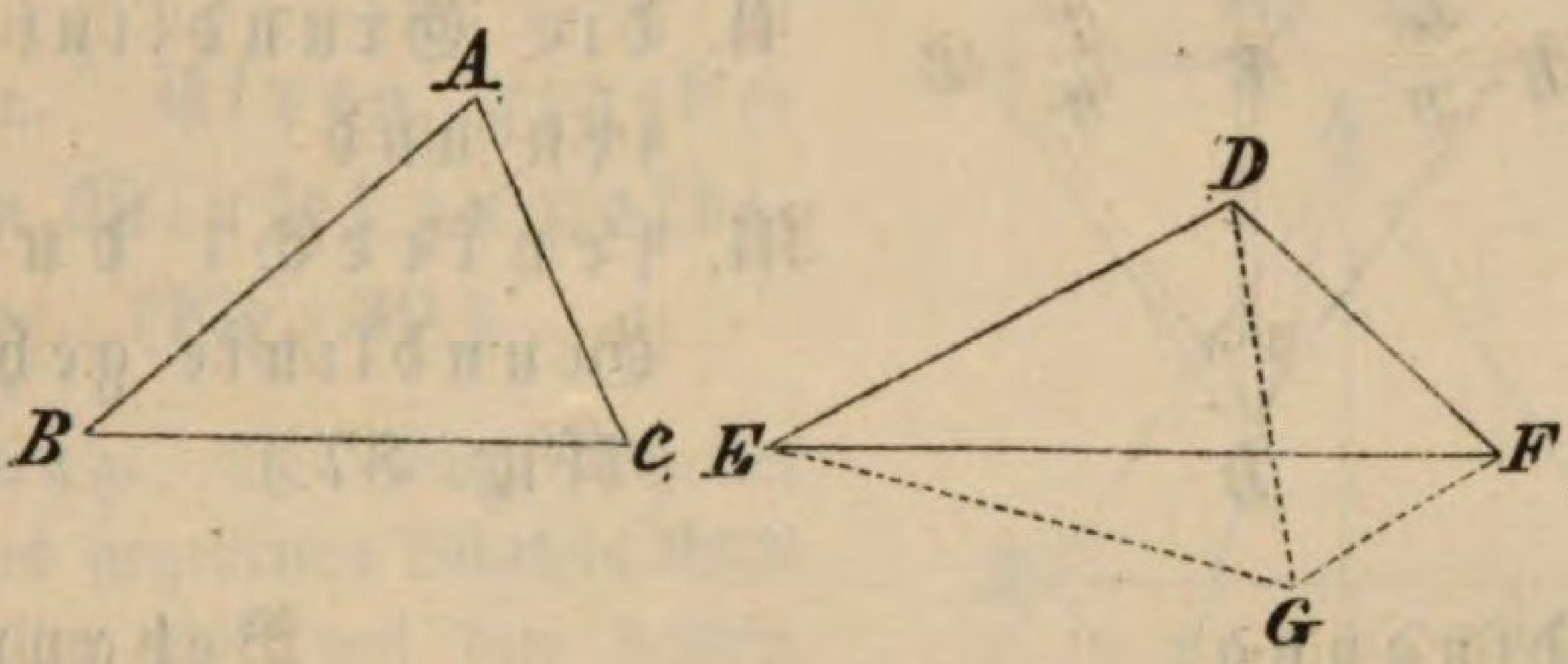
§. 48.

Lehrsatz I. Wenn zwei Dreiecke zwei Seiten gleich, die Winkel aber, die diese gleichen Seiten einschließen, ungleich haben, so sind auch die

dritten Seiten ungleich und zwar ist dieses die größere Seite, die dem größern Winkel gegenüber liegt.

II. Wenn zwei Dreiecke zwei Seiten gleich, die dritten Seiten aber ungleich haben, so sind auch die Winkel ungleich, die die gleichen Seiten einschließen und zwar ist dieses der größere Winkel, der der größern dritten Seite gegenüber liegt. (Fig. 36.)

Fig. 36.



I. Bedingung.

$AB = DE$

$AC = DF$

$\angle BAC < \angle EDF$.

I. Behauptung.

$BC < EF$.

Beweis I. Man construire $\angle EDG = \angle BAC$, $DG = DF = AC$ und ziehe EG und GF, so ist $\triangle ABC \cong DEG$ (§. 38), daher $EG = BC$. Ferner ist $\angle DGF = \angle DFG$ (§. 44.), daher $\angle EGF > \angle EFG$, folglich $EF > EG$ (§. 46. II.) oder $EF > BC$.

II. Bedingung.

$AB = DE$

$AC = DF$

$BC < EF$.

II. Behauptung.

$\angle BAC < \angle EDF$.

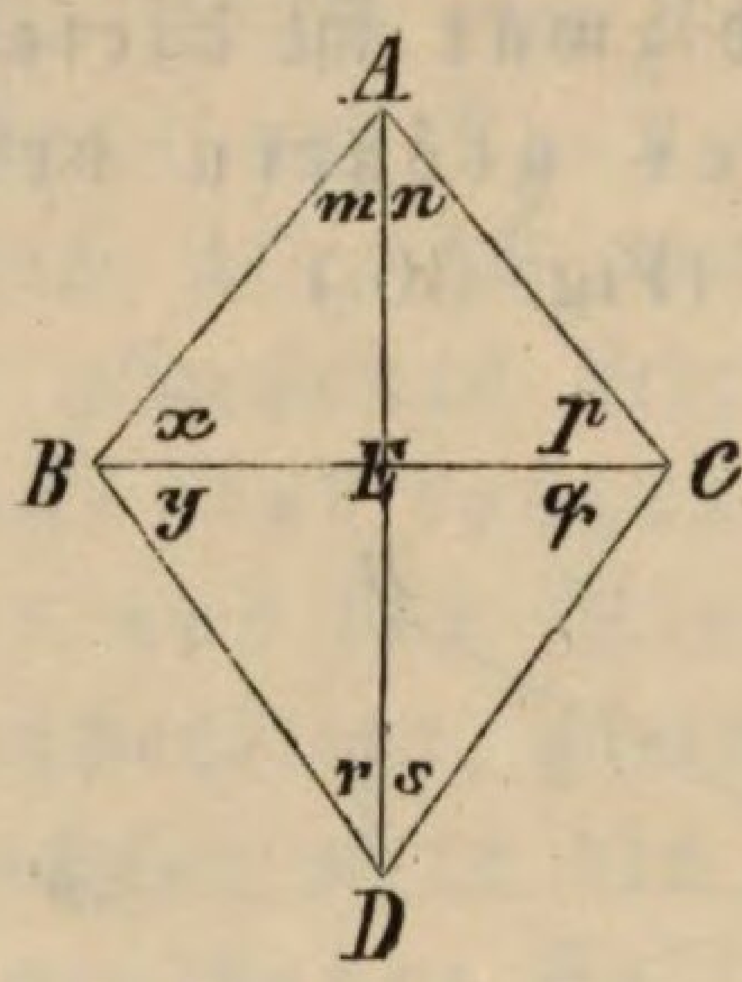
Beweis II. Wollte man annehmen, es wäre $\angle BAC$ nicht $<$ $\angle EDF$, so müßte entweder $\angle BAC = \angle EDF$ oder $\angle BAC > \angle EDF$ seyn. Im ersten Fall wäre $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (§. 38.), also auch $BC = EF$, was gegen die Bedingung, und im zweiten Fall wäre nach dem Beweis des ersten Theiles dieses Lehrsatzes $BC > EF$, was ebenfalls gegen die Bedingung; daher ist nothwendigerweise $\angle BAC < \angle EDF$.

§. 49.

Lehrsatz. Wenn man auf einer nämlichen Grundlinie zwei gleichschenkelige Dreiecke errichtet und ihre Spitzen durch eine gerade Linie verbindet, so wird diese gerade Linie

I. die Winkel an der Spitze halbiren,
II. die Grundlinie halbiren und
III. senkrecht durch die Grundlinie gehen.
(Fig. 37.)

Fig. 37.



Bedingung:	Behauptung:
AB = AC	I. ∠ BAD = ∠ DAC
BD = DC.	∠ BDA = ∠ ADC.
	II. BE = EC.
	III. AE ⊥ BC.

Beweis. Weil AB = AC
BD = DC (B. D. B.)
AD = AD (Grundsatz 1.)

△ABD ≅ △ACD (§. 42.)

Also auch I. ∠ BAD = ∠ DAC
und ∠ BDA = ∠ ADC (§. 37.)
Weil ferner ∠ ABC = ∠ ACB (§. 44.)
und so eben gezeigt, daß ∠ BAE = ∠ CAE
und AB = AC (B. D. B.)

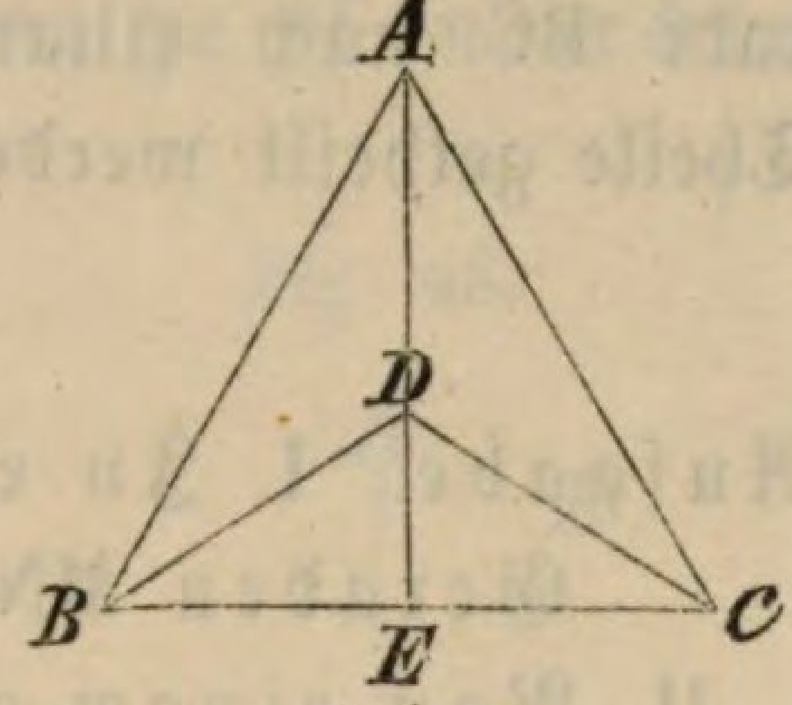
so ist △ABE ≅ △ACE (§. 40.)

Daraus (nach §. 37.) II. BE = EC
und ∠ AEB = ∠ AEC
d. h. III. AE ⊥ BC (§. 6.)

Zusatz. Man kann sich leicht überzeugen, daß dieser Lehrsatz dieselbe volle Gültigkeit hat, oder daß es einerlei ist, wenn die beiden über BC errichteten gleichschenkeligen

Dreiecke auf einer Seite von BC liegen (Fig. 38.); jedoch ist in diesem Fall für den Beweis nothwendig, daß AB≷BD sey, und daß die Gerade, welche die beiden Spitzen verbindet, verlängert wird, bis sie die Grundlinie trifft.

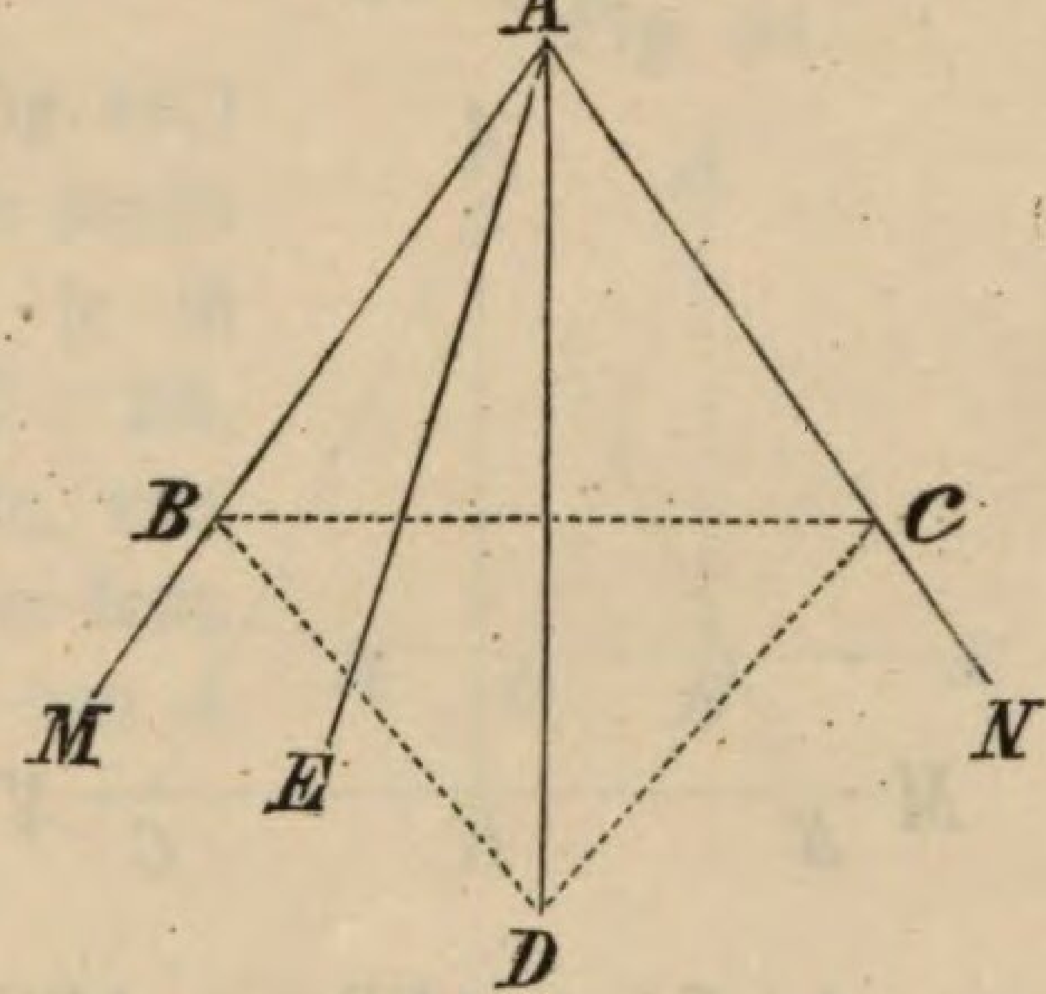
Fig. 38.



§. 50.

Aufgabe. Einen gegebenen Winkel zu halbiren. (Fig. 39.)

Fig. 39.



Auflösung. Von dem Scheitel A des gegebenen Winkels MAN schneide man auf den beiden Schenkeln gleiche Stücke AB = AC ab, errichte über BC ein gleichschenkeliges Dreieck BCD (gleichviel auf welche Seite von BC, nur darf es mit △ABC nicht zusammen fallen) und ziehe AD, so ist durch AD der Winkel MAN halbirt.

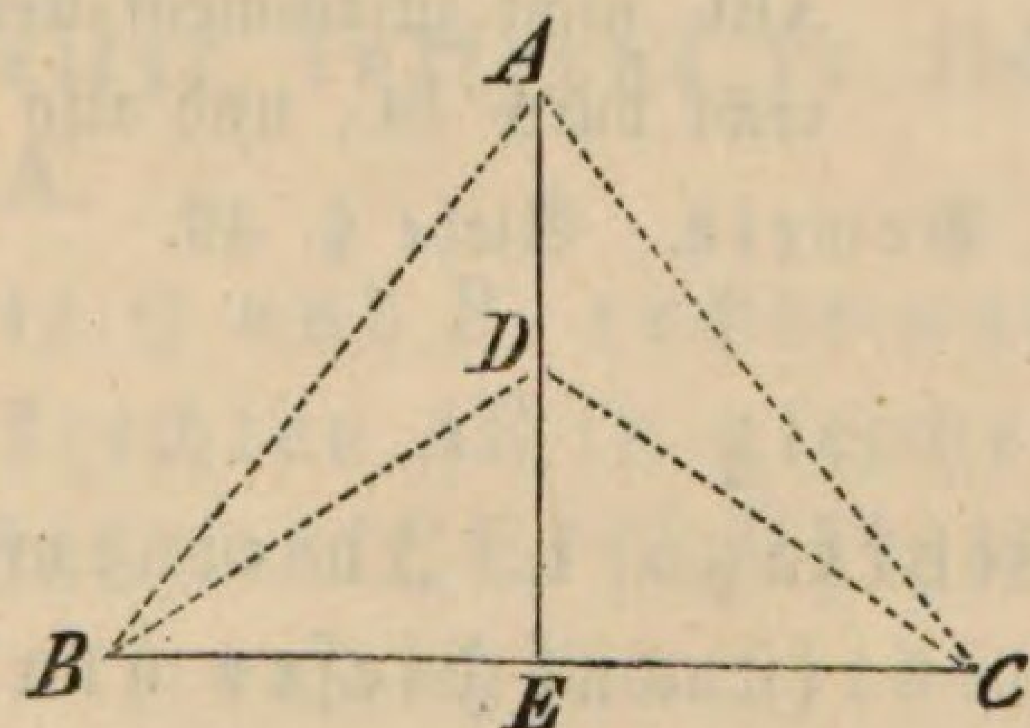
Beweis. Beruht auf §. 49.

Zusatz. Wird ∠MAD durch AE wieder halbirt u. s. w. so kann der Winkel MAN in 4, 8, 16, 32, 64... gleiche Theile getheilt werden.

§. 51.

Aufgabe. Eine gegebene Gerade BC zu halbiren. (Fig. 40.)

Fig. 40.



Auflösung. Ueber BC errichte zwei gleichschenkelige Dreiecke ABC und DBC und verbinde durch die Gerade AD ihre Spitzen. Vergleiche auch Fig. 37.

Beweis. Siehe §. 49.

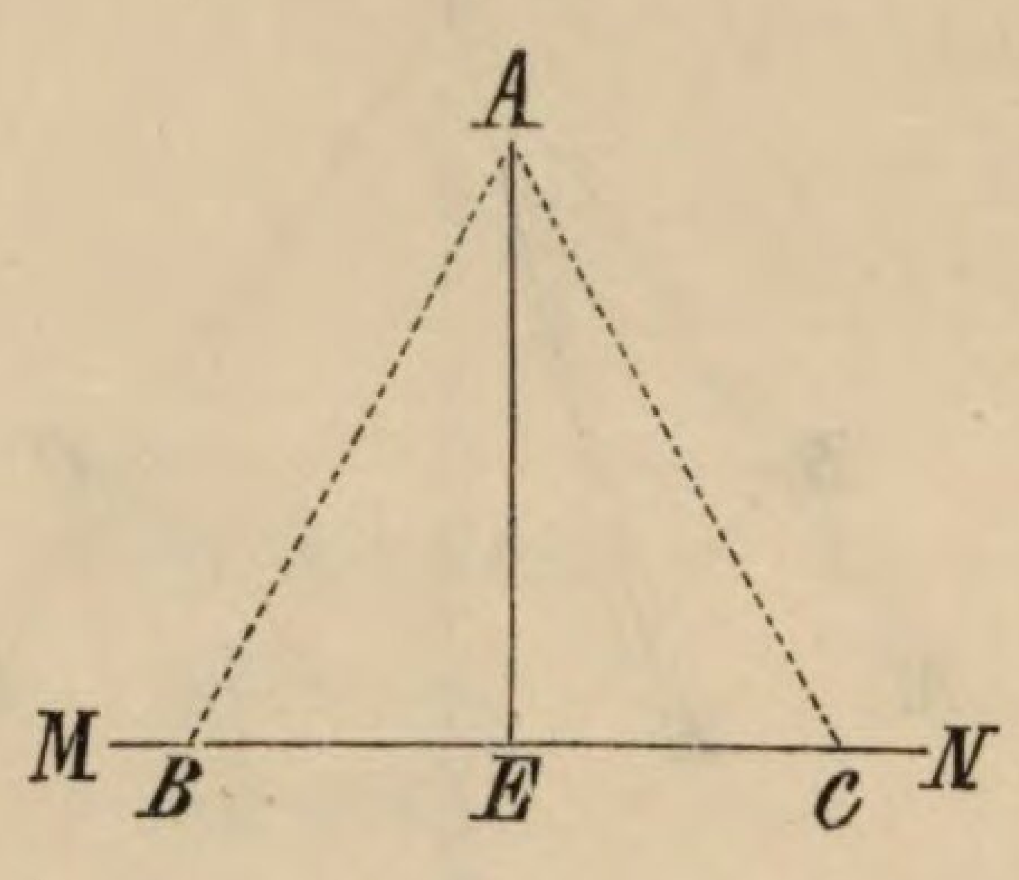
Zusatz. Durch wiederholtes Halbiren kann die Gerade BC nach einander in 4, 8, 16, 32, 64... gleiche Theile getheilt werden.

§. 52.

Aufgabe. I. In einem gegebenen Punkte E einer Geraden MN eine Senkrechte zu errichten.

II. Von einem außerhalb einer Geraden MN liegenden Punkte A auf diese Gerade eine Senkrechte zu fällen.

Fig. 41.



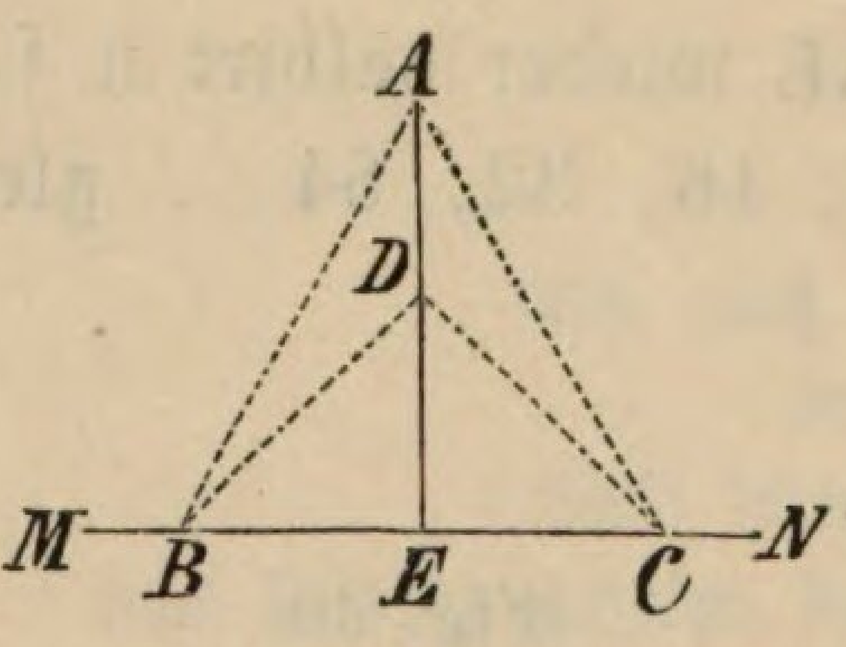
Auflösung. I. Theil. Mit einem beliebigen Halbmesser schneide man (Fig. 41.) von E aus, rechts und links gleiche Stücke BE, EC ab, errichte über BC ein gleichschenkeliges △ ABC und ziehe AE, so ist AE ⊥ MN.

Beweis. BE = EC
AB = AC (V. D. C.)
AE = AE

△ABE ≅ △ACE (§. 42.)

folglich ∠ AEB = ∠ AEC (§. 37.), daher AE ⊥ BC (§. 6.) oder auch AE ⊥ MN.

Fig. 42.



Auflösung. II. Theil. Mit einem gehörig großen Halbmesser durchschneide man (Fig. 42.) MN oder nöthigenfalls deren Verlängerung von A aus in zwei Punkten B und C, und errichte über BC ein gleichschenkeliges △BCD (welches aber mit △ ABC nicht zusammenfallen darf), und ziehe AD, so geht AD senkrecht durch BC, und also AE senkrecht auf MN.

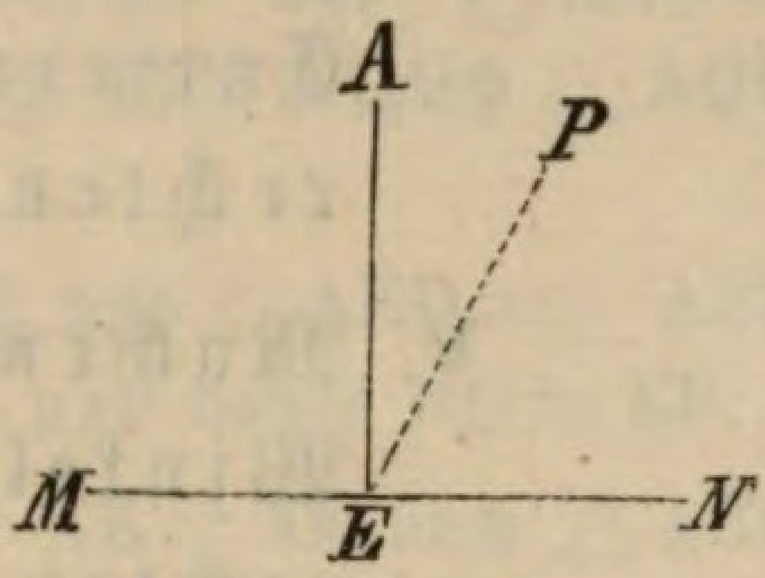
Beweis. Siehe §. 49.

§. 53.

Lehrsatz. I. In einem Punkte E der Geraden MN ist auf dieser nur eine einzige Senkrechte zu errichten möglich.

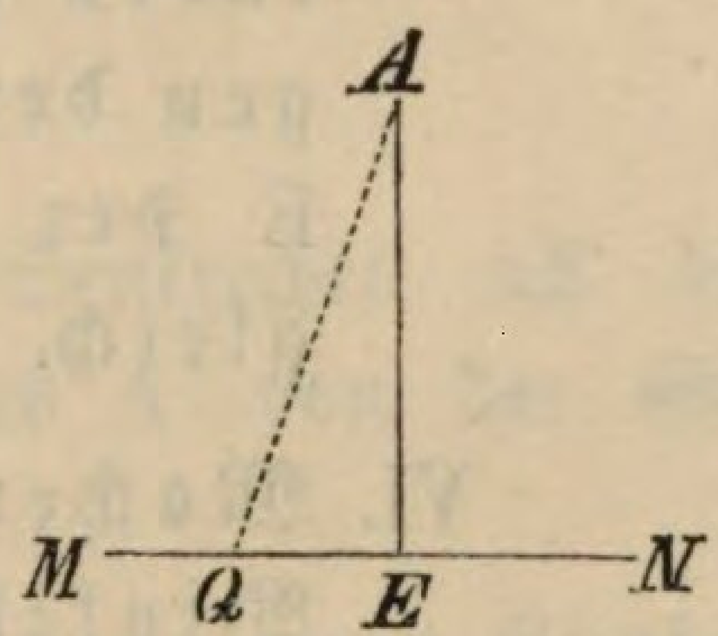
II. Von einem Punkte A außerhalb der Geraden MN ist auf diese nur eine einzige Senkrechte zu fällen möglich.

Fig. 43.



Beweis. I. Theil. Wäre außer AE (Fig. 43.) noch eine andere Senkrechte, etwa EP möglich, so ist ∠AEN = R und auch ∠PEN wäre = R, folglich ∠AEN = ∠PEN, was ungereimt ist; daher kann weder EP, noch irgend eine andere gerade Linie in E, außer AE, auf MN senkrecht stehen.

Fig. 44.



Beweis. II. Theil. Wäre von A (Fig. 44.) aus auf MN, außer AE, noch eine zweite Senkrechte, etwa AQ möglich, so ist ∠AEM = R, auch wäre ∠AQE = 2R, folglich im △AQE zwei Rechte, was unmöglich ist (§. 35. Z. 3.); daher kann nur eine einzige Senkrechte AE von A auf MN gefällt werden.

§. 54.

Lehrsatz. Wenn von einem Punkte A (Fig. 45.) außerhalb einer Geraden MN, auf diese mehrere Gerade AT, AQ, AE, AP, AS gezogen werden, so gilt Folgendes:

I. Die Senkrechte AE ist die kürzeste Linie, die von dem Punkte A auf die Gerade MN gezogen werden kann.

II. Je weiter sich ein Punkt Q, T vom Punkte E entfernt, je weiter entfernt er sich auch vom Punkte A.

III. Liegen zwei Punkte Q und P, rechts und links von der Senkrechten AE in gleicher Entfernung vom Fußpunkt E, so sind sie auch in gleicher Entfernung von jedem Punkt A′ der Senkrechten AE.

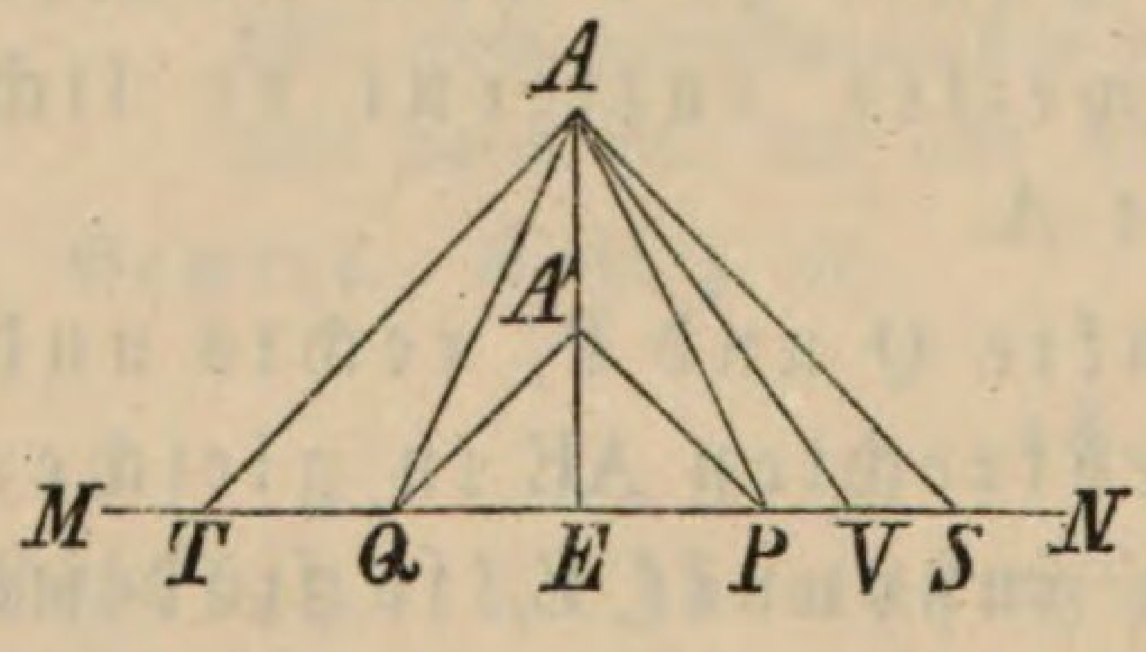
IV. Liegt ein Punkt A′ der Senkrechten AE rechts und links gleichweit von zwei Punkten Q und P entfernt, so sind diese Punkte Q und P ebenfalls in gleicher Entfernung vom Fußpunkt E dieser Senkrechten.

V. Machen zwei Gerade AQ und AP gleiche Winkel rechts und links mit der Senkrechten AE, so machen sie auch gleiche Winkel mit der Geraden MN und die Geraden AQ und AP, sowie die Entfernungen der Punkte Q und P vom Fußpunkt E der Senkrechten AE sind einander gleich.

VI. Machen zwei Gerade AQ und AP gleiche Winkel mit der Geraden MN und steht AE senkrecht auf MN, so liegen auch Q und P gleich weit vom Fußpunkt E der Senkrechten AE entfernt.

VII. Sind die Punkte Q und P der Geraden MN gleichweit von einem Punkt E derselben Geraden und auch gleichweit von einem Punkt A außerhalb MN entfernt, so steht AE senkrecht auf MN.

Fig. 45.



Beweis. I. Denn alle andern Geraden, z. B. AQ, AS, werden Hypotenusen der rechtwinkeligen Dreiecke AEQ und AES, und AE bleibt immer eine Kathete, folglich AQ, AS u. s. w. immer $>$ AE (§. 46. Z. 1.).

II. Denn $\angle$ AEQ $=$ R, daher $\angle$ AQE $<$ R (§. 35. Z. 4.), also $\angle$ AQT $>$ R, folglich AT $>$ AQ (§. 46. II.).

III. Ist EQ = EP, und weil A'E = A'E und $\angle$ AEQ = $\angle$ AEP = R, so ist $\triangle$ A'QE $\cong$ $\triangle$ A'PE (§. 38.), folglich A'Q = A'P. (§. 37.)

IV. Ist A'Q = A'P, und weil A'E = A'E und A'EQ = A'EP = R, so ist $\triangle$ A'EQ $\cong$ $\triangle$ A'EP (§. 47. Z. 2.). daher EQ = EP (§. 37.).

V. Ist $\angle$ QAE = $\angle$ PAE, und weil AE = AE und $\angle$ AEQ = $\angle$ AEP = R, so ist $\triangle$ AEQ $\cong$ $\triangle$ AEP (§. 40.), folglich $\angle$ AQE = $\angle$ APE und EQ = EP (§. 37.)

VI. Ist $\angle$ AQE = $\angle$ APE und weil AE = AE und $\angle$ AEQ = $\angle$ AEP = R, so ist $\triangle$ AEQ $\cong$ $\triangle$ AEP (§. 40.), und daher EQ = EP.

VII. Ist EQ = EP und AQ = AP, so ist, weil AE = AE auch $\triangle$ AEQ $\cong$ $\triangle$ AEP (§. 42.), daher $\angle$ AEQ = $\angle$ AEP, folglich AE $\perp$ MN (§. 6.)

§. 55.

Erklärung. Man nennt die Senkrechte AE die Entfernung (Abstand) des Punktes A von der Geraden MN.

Im Dreieck nennt man die Entfernung einer Winkelspitze von der gegenüberliegenden Seite, also die Senkrechte von einer Winkelspitze auf die gegenüberliegende Seite, die Höhe des Dreiecks und in diesem Fall heißt die Seite, auf welcher die Höhe senkrecht aufsteht, die Grundlinie, sowie die beiden Stücke, in welche die Grundlinie durch die Höhe getheilt wird, Segmente (Abschnitte) heißen.

Zusatz 1 In jedem Dreieck sind immer drei Höhen möglich. Im rechtwinkeligen Dreieck werden zwei Höhen durch die beiden Katheten schon ausgedrückt; die dritte, nämlich die Senkrechte von der Spitze des rechten Winkels auf die gegenüberliegende Hypotenuse, heißt hier vorzugsweise die Höhe des rechtwinkeligen Dreiecks.

Zusatz 2. Liegen an der Grundlinie zwei spitze Winkel, so fällt die Höhe innerhalb des Dreiecks, liegt aber an derselben ein stumpfer Winkel, so fällt die Höhe außerhalb des Dreiecks, auf die verlängerte Grundlinie, und zwar auf die Seite hin, auf welcher der stumpfe Win-

kel liegt; liegt endlich an der Grundlinie ein rechter Winkel, so fällt die Höhe mit einer Seite (Kathete) des rechtwinkeligen Dreiecks zusammen.

Denn fiele (Fig. 45.) die Höhe in dem spitzwinkeligen △AQP außerhalb des Dreiecks, etwa wie AT, so wäre ATP = R; nun ist (§. 9. Z. 3.) ∠AQT > R, folglich gegen §. 35. Z. 3.

Im rechtwinkeligen Dreieck AQE, muß die Höhe AE mit der Kathete AE zusammen fallen (§. 53. II.).

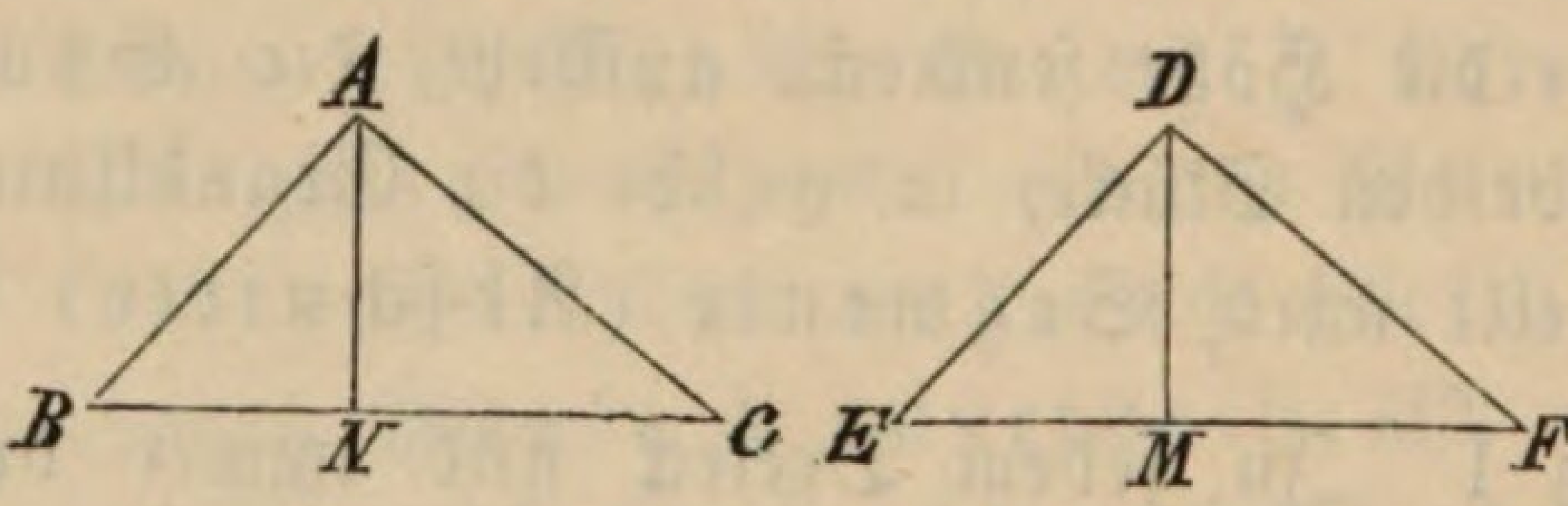
Fiele im stumpfwinkeligen Dreieck APS die Höhe innerhalb des Dreiecks, etwa wie AV, so wäre AVP = R; nun ist ∠APV > R, folglich wieder gegen §. 35. Z. 3.

Fiele endlich die Höhe auf die Seite des spitzen Winkels, so erhielte man denselben Widerspruch.

§. 56.

Lehrsatz. In zwei congruenten Dreiecken sind die Höhen, die aus den Spitzen gleicher Winkel auf die gegenüberliegenden Grundlinien gefällt werden, so wie die Abschnitte der Grundlinien, einander gleich. (Fig. 46.)

Fig. 46.



Bedingung:	Behauptung:
△ABC ≅ △DEF	AN = DM
∠A = ∠D	BN = EM
AN ⊥ BC	NC = MF.
DM ⊥ EF.	

Beweis.

AC = DF
∠ACN = ∠DFM
∠ANC = ∠DMF

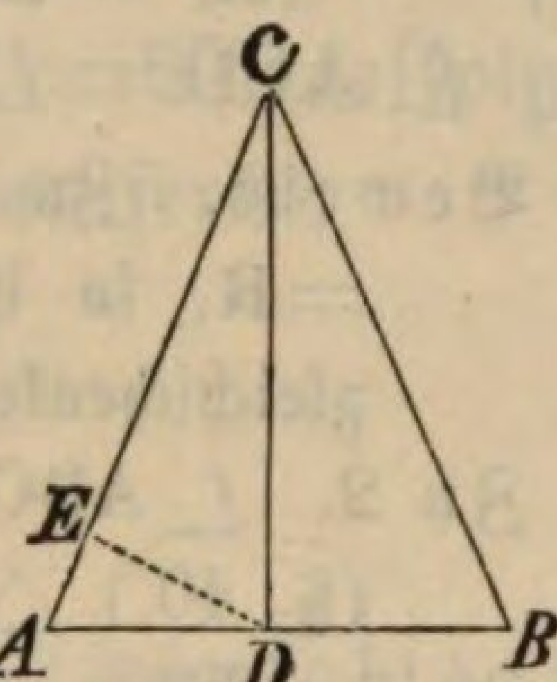
△ANC ≅ △DMF (§. 40.)

daher AN = DM und NC = MF, folglich auch BN = EM.

§. 57.

Lehrsatz. I. Wenn in einem gleichschenkeligen Dreieck ABC aus der Spitze des Winkels, den die gleichen Schenkel einschließen, eine Gerade CD auf die gegenüberliegende Grundlinie gezogen wird, und es findet einer von folgenden drei Fällen Statt:

Fig. 47.



1) diese Gerade CD steht senkrecht auf der Grundlinie AB, oder

2) diese Gerade CD halbirt die Grundlinie AB, oder

3) diese Gerade CD halbirt den Winkel an der Spitze ∠ACB,

so finden auch zugleich die beiden andern Fälle Statt.

II. Wenn je zwei von diesen Fällen Statt finden, so ist das Dreieck gleichschenkelig (Fig. 47.)

I. Bedingung.	I. Behauptung.
△ABC gleichschenkelig und entweder	
1) CD ⊥ AB, oder	1) AD = DB ∠ACD = ∠BCD
2) AD = DB, oder	2) CD ⊥ AB ∠ACD = ∠BCD
3) ∠ACD = ∠BCD.	3) CD ⊥ AB AD = DB

Beweis I. Denn wenn man zu jeder von den drei Bedingungen die zwei Eigenschaften des gleichschenkeligen Dreiecks AC = CB und ∠CAD = ∠CBD hinzufügt, so erhält man immer △CAD ≌ △CBD, woraus sich dann leicht die Behauptung ergibt.

II. Bedingung.	II. Behauptung.
1) $CD \perp AB$ $AD = DB$, oder	$\triangle ABC$ ist gleichschenkelig.
2) $CD \perp AB$ $\angle ACD = \angle BCD$, oder	
3) $AD = DB$ $\angle ACD = \angle BCD$.	

Beweis. Zu 1. Weil $AD = DB$, $CD = CD$ und $\angle ADC = \angle BDC = R$, so ist $\triangle ACD \cong \triangle BCD$, also $AC = BC$ oder $\triangle ABC$ gleichschenkelig.

Zu 2. $\angle ADC \angle BDC = R$; $\angle ACD = \angle BCD$, $DC = DC$; so ist (§. 40.) $\triangle ACD \cong \triangle BCD$, oder $AC = BC$.

Zu 3. Wäre $AC \gtrless BC$, etwa $AC > BC$, so sey $CE = CB$. Weil nun $CD = CD$ und $\angle ECD = \angle BCD$ (V. D. B.), so wäre (§. 38.) $\triangle CED \cong \triangle CBD$ und daraus (§. 37.) $DE = DB$, $\angle EDC = \angle CDB$, daher $2 \angle BDC = \angle EDB$.

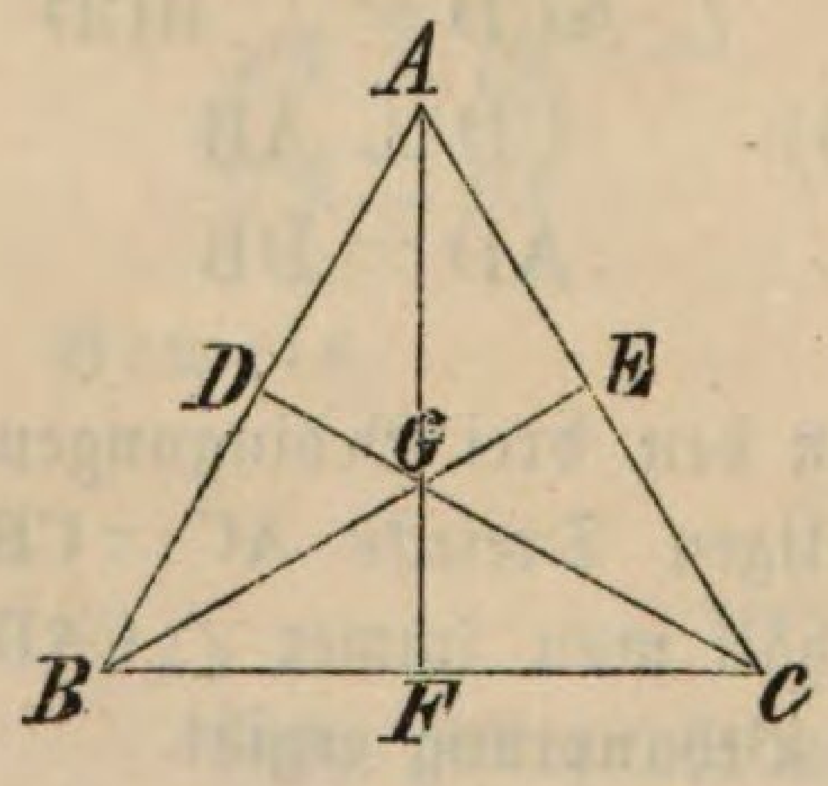
Es ist aber (V. D. B.) $AD = DB$, so wäre also auch $DE = AD$ und $\angle EAD = \angle AED$ (§. 44.)

Ferner ist $\angle AED + \angle EAD = \angle EDB$ (§. 35.) oder $2 \angle EAD = \angle EDB$ (§. 44. Z. 3.). Nun war aber auch $\angle EDB = 2 \angle BDC$, folglich wäre $\angle EAD = \angle BDC$ und daraus $AC \parallel CD$ (§. 15.). Dieses ist offenbar ungereimt; daher kann AC nicht $\gtrless BC$, sondern es muß $AC = BC$ seyn.

Zusatz 1. Wenn man in der Mitte D der Geraden AB eine Senkrechte CD errichtet, so liegen in der Senkrechten die Spitzen aller gleichschenkeligen Dreiecke, die auf AB, als Grundlinie, errichtet werden können.

Zusatz 2. Im gleichschenkeligen Dreieck theilt die Höhe, welche auf der ungleichen Seite aufsteht, diese in zwei gleiche Theile.

Fig. 48.



Zusatz 3. Im gleichseitigen Dreieck halbiren also die drei Höhen jedesmal die gegenüberliegenden Grundlinien (§. 36. Z. 3.); auch durchschneiden sich diese drei Höhen in einem und demselben Punkt. (Fig. 48.)

Denn sind BE und CD die zwei Höhen und man zieht durch ihren Durchschnittspunkt G die Gerade AF, so ist $\triangle ADG \cong \triangle AEG$ (§. 47. Z. 2.), daher $\angle DAG = \angle EAG$, folglich $AF \perp BC$.

Zusatz 4. Weil $\triangle\triangle ABG, BCG, ACG$ gleichschenkelig, also $AG = BG = GC$, und weil die Senkrechte $DG = FG = EG$, so liegt der Punkt G sowohl von jeder Winkelspitze als von jeder Seite des Dreiecks gleichweit entfernt.

§. 58.

Lehrsatz. Wenn man in einem rechtwinkeligen Dreieck durch eine Gerade den rechten Winkel so in zwei Theile theilt, daß diese Theile den beiden spitzen Winkeln des Dreiecks gleich werden und zwar

I. daß die zwei gleichen Winkel an einer Kathete, oder

II. daß die zwei gleichen Winkel an den beiden Katheten liegen,

so ist

im ersten Fall: das Stück der theilenden Linie innerhalb des Dreiecks so groß, als die halbe Hypotenuse und geht selbst durch die Mitte derselben,

im zweiten Fall: die theilende Linie senkrecht auf der Hypotenuse und ist folglich die Höhe des Dreiecks.

Fig. 49.

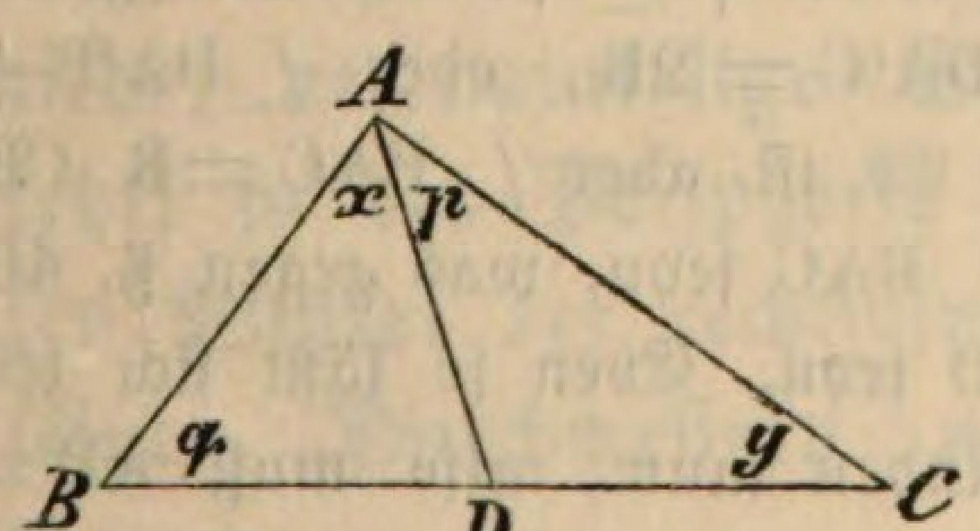
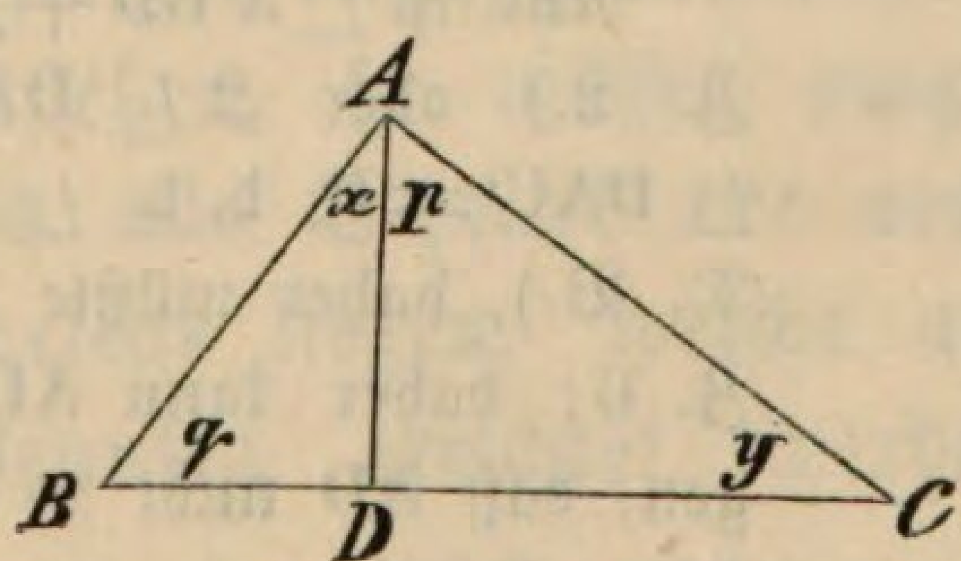


Fig. 50.



Bedingung. Behauptung.

$\angle BAC = R$.

I. $x = q$ (Fig. 49.) I. $BD = DC = AD$.

II. $q = p$ (Fig. 50.) II. $AD \perp BC$

Beweis, I. Wenn $x = q$, muß auch $p = y$ seyn (§. 36. Z. 1.); daher $BD = AD$ und auch $AD = DC$ (§. 45.); folglich ist auch $BD = DC = AD$.

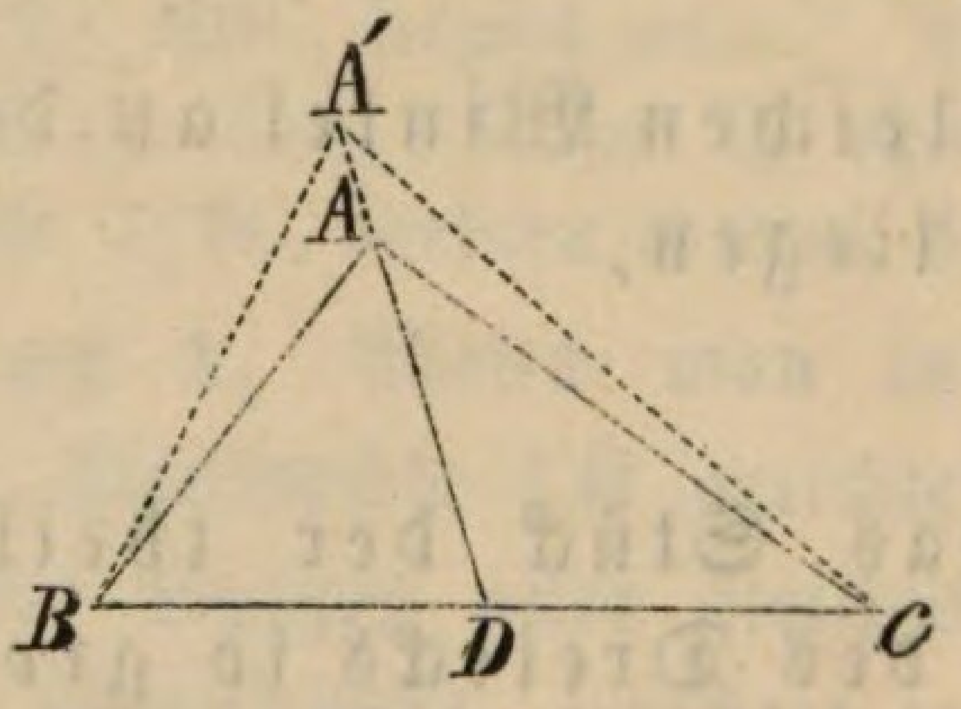
II. Ist $q = p$, so muß auch $x = y$ sein (§. 36. Z. 1.); folglich (nach §. 35. Z. 6.) $\angle BDA = \angle ADC$, oder $AD \perp BC$ (§. 6.).

Zusatz. Wird $x = p$, so wird auch $q = y$ und $x = p = q = y = \frac{1}{2}R$; mithin in diesem Fall $\triangle ABC$ rechtwinkelig und gleichschenkelig, d. h. im rechtwinkeligen, gleichschenkeligen Dreieck finden obige zwei Fälle zugleich Statt.

§. 59.

Lehrsatz. Wenn in einem rechtwinkeligen Dreieck von der Mitte der Hypotenuse eine Gerade an die Spitze des rechten Winkels gezogen wird, so ist diese Gerade der halben Hypotenuse gleich. (Fig 51.)

Fig. 51.



Bedingung. Behauptung.

$\angle BAC = R$ $AD = BD = DC$.

$BD = DC$.

Beweis. Wäre $AD \gtrless BD$, etwa $AD < BD$, so mache man $A'D = BD = DC$ und ziehe $A'B$ und $A'C$, so wäre $\angle A'BD = \angle DA'B$ (§. 44.) und aus demselben Grunde $\angle A'CD = \angle DA'C$.

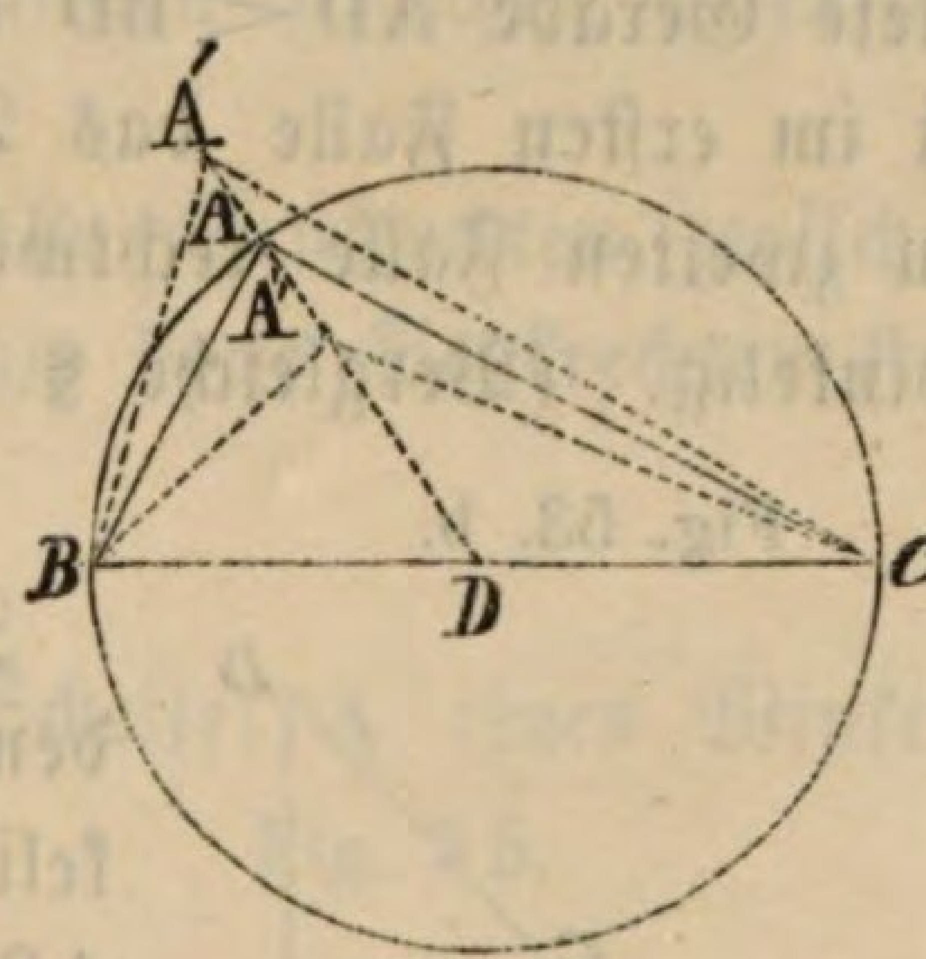
Nun ist $\angle A'BD + \angle DA'B + \angle A'CD + \angle DA'C = 2R$ (§. 35. Z. 2.) oder $2\angle DA'B + 2\angle DA'C = 2R$, oder $\angle DA'B + \angle DAC' = R$, d. h. $\angle BA'C = R$. Es ist aber $\angle BAC = R$ (B. D. B.), daher müßte $\angle BA'C = \angle BAC$ seyn, was gegen §. 46. Z. 6; daher kann AD nicht $< BD$ seyn. Eben so läßt sich zeigen, daß AD nicht $> BD$ Statt finden kann; also muß $AD = BD = DC$ seyn.

§. 60.

Lehrsatz. Wenn man in einem Dreieck ABC eine Seite BC in D halbirt, und von dem Halbirungspunkte D eine Gerade AD bis an die gegenüberliegende Winkelspitze A von der Beschaffenheit ziehen kann, daß sie der halben Seite BC gleich ist, so ist das Dreieck bei A rechtwinkelig. (Fig. 49.)

Beweis. Weil AD = BD = DC, so ist x = q und p = y (§. 44.). Nun ist aber (§. 35. Z. 2.) q + x + p + y = 2R, oder 2x + 2p = 2R, d. h. x + p = R = ∠ BAC.

Fig. 52.



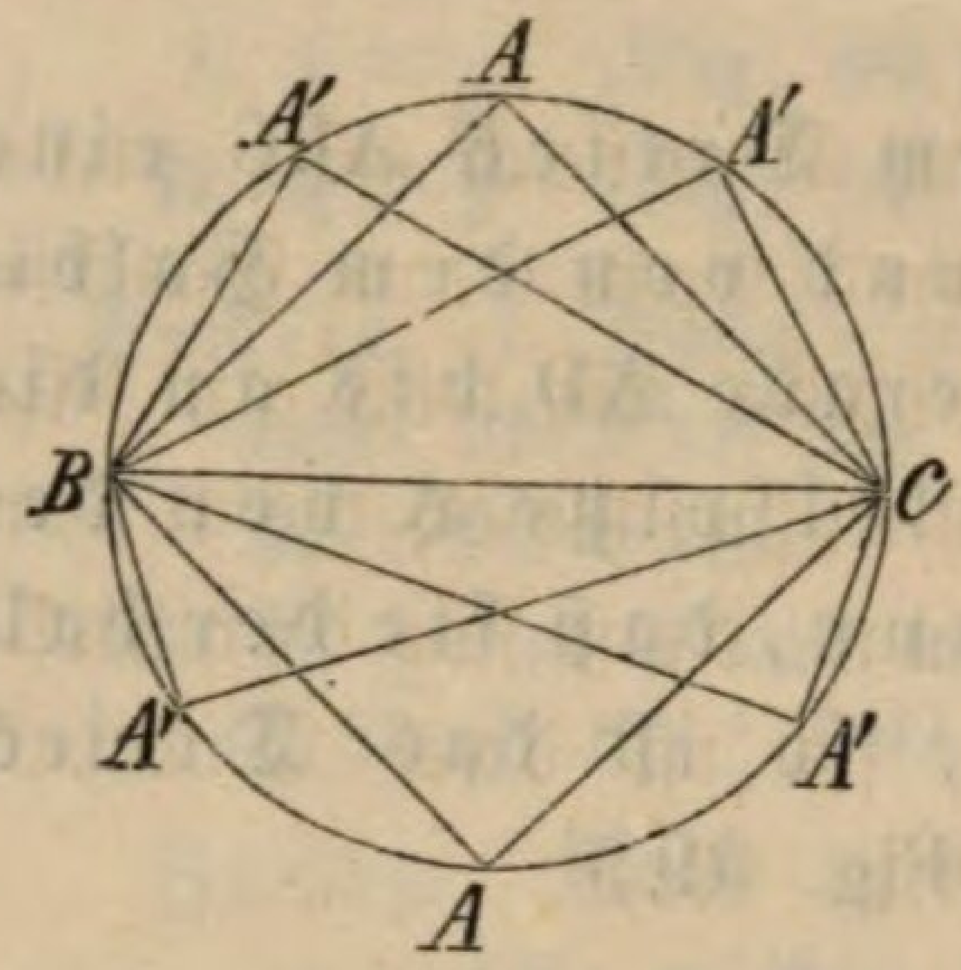
Zusatz 1. Also ist (Fig. 52.) jedes Dreieck ABC rechtwinkelig, dessen eine Seite BC der Durchmesser eines Kreises ist, während die Spitze A des gegenüberliegenden rechten Winkels in der Peripherie des Kreises liegt. Und um jedes rechtwinkelige Dreieck ABC läßt sich ein Kreis beschreiben, in welchem die Hypotenuse der Durchmesser und die Spitze des rechten Winkels ein Punkt in der Peripherie wird.

Denn ginge der Kreis nicht durch A, sondern durch A' oder durch A'', so käme man in Widerspruch mit §. 59.

Zusatz 2. Weil, wenn man von jedem Punkt der Peripherie gerade Linien an die Endpunkte eines Durchmessers zieht, rechtwinkelige Dreiecke entstehen, so müssen umgekehrt in der Peripherie des Kreises alle Scheitel der rechten Winkel der rechtwinkeligen Dreiecke liegen, welche auf seinen Durchmessern als Hypotenusen errichtet werden können.

Zusatz 3. Von den unendlich vielen rechtwinkeligen Dreiecken, die auf einem Durchmesser construirt werden können, sind, wenn diese Dreiecke zugleich ungleichseitig sind, immer vier, und wenn sie zugleich gleichschenkelig sind, nur zwei einander congruent.

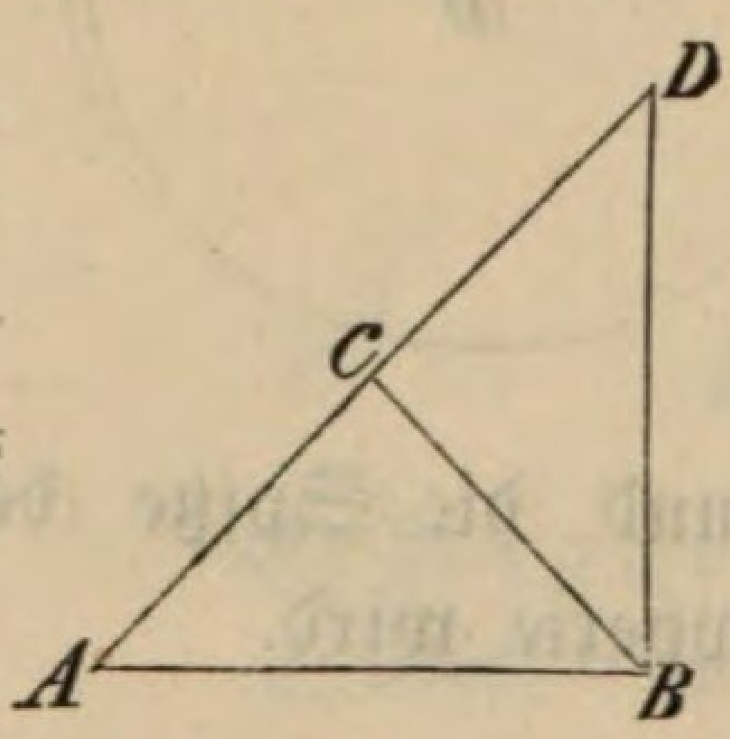
Fig. 53.



Wovon man sich leicht überzeugen kann. (Fig. 53.)

Zusatz 4. Wenn (Fig. 51.) in einem Dreieck ABC von der Spitze A in die Mitte D der gegenüberliegenden Grundlinie BC eine Gerade AD gezogen wird und es ist diese Gerade AD $<$ BD oder AD $=$ BD oder AD $>$ BD, so ist im ersten Falle das Dreieck ABC bei A stumpfwinkelig, im zweiten Falle rechtwinkelig und im dritten Falle spitzwinkelig. (Vergleiche §. 46. Z. 6.)

Fig. 53. b.



Zusatz 5. Wenn (Fig. 53. b.) man den Schenkel AC eines gleichschenkeligen (oder gleichseitigen) Dreiecks ABC über die Spitze hinaus um sich selbst verlängert, nämlich, wenn man CD $=$ AC macht, und BD zieht, so ist $\angle$ABD $=$ R.

Mittelst dieses Satzes kann folgende Aufgabe:

Am Endpunkt B einer Geraden AB, welche nicht über B hinaus verlängert werden darf, eine Senkrechte zu errichten,

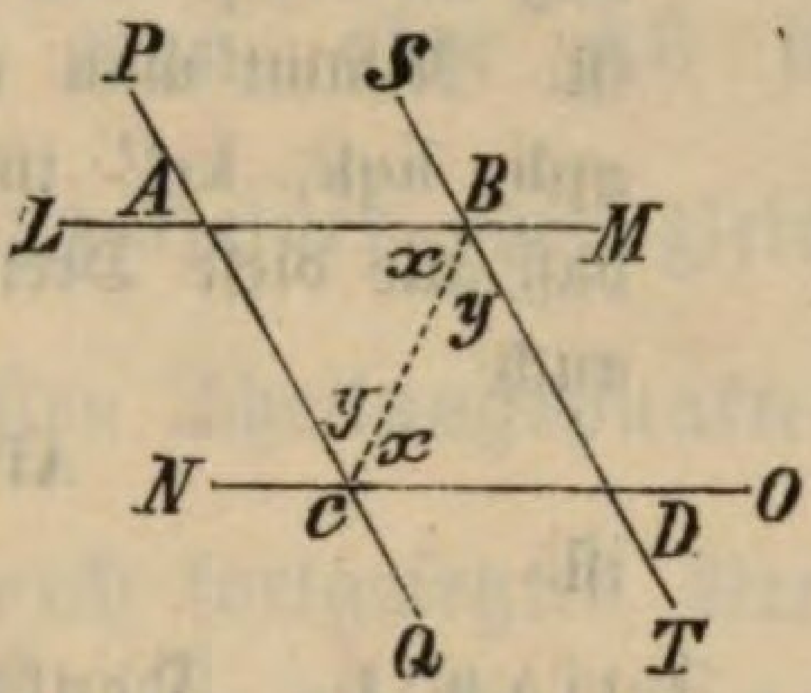
gelöset werden.

B. Proportionallinien, Aehnlichkeit der Dreiecke.

§. 61.

Lehrsatz. Werden zwei Parallellinien von zwei andern Parallellinien geschnitten, so sind die dazwischen und einander gegenüberliegenden Abschnitte gleich. (Fig. 54.)

Fig. 54.



Bedingung.	Behauptung.
LM ∥ NO	AB = CD
PQ ∥ ST	AC = BD.

Beweis. Ziehe BC, so ist x = x, y = y (§. 16.) und da BC = BC, so ist △ABC ≅ △DCB; daher (§. 25.) AB = CD und AC = BD.

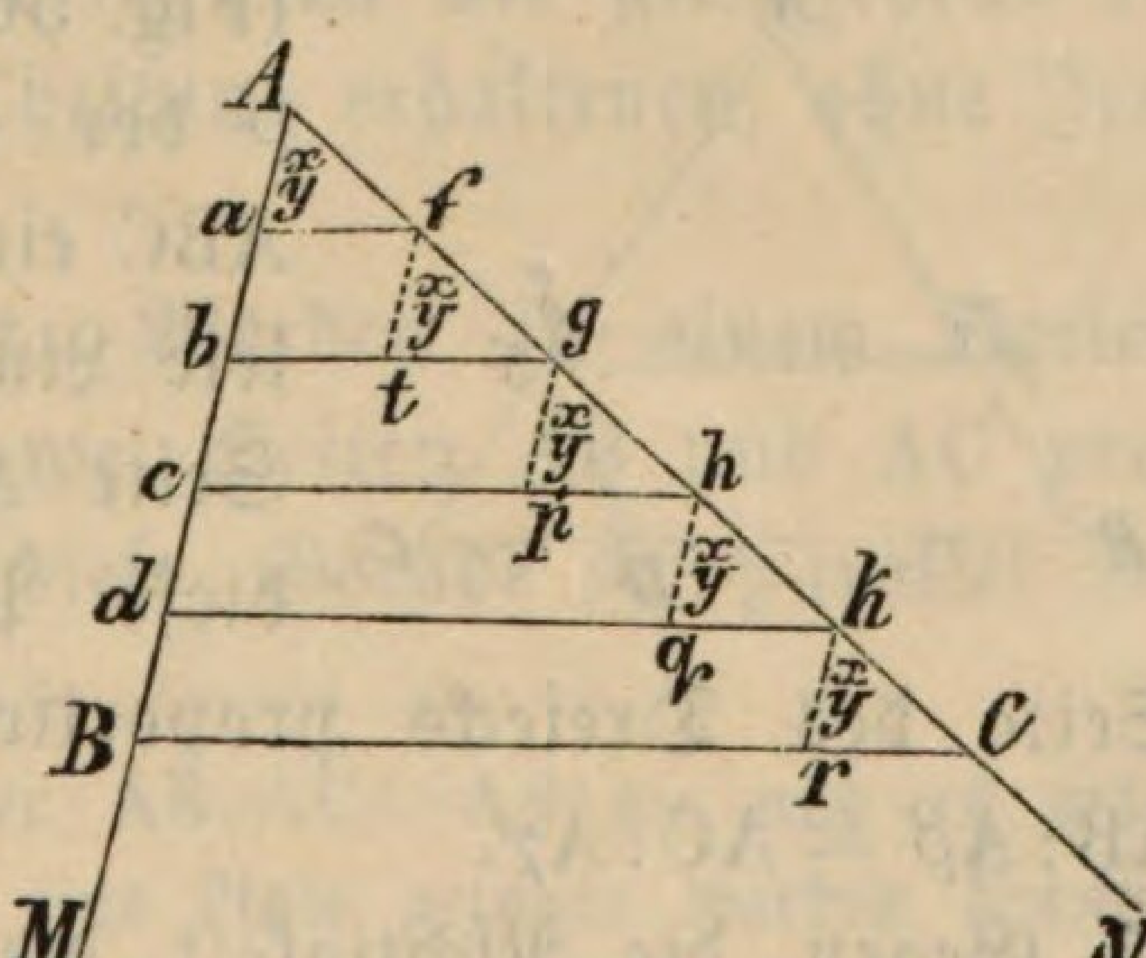
Zusatz 1. Also sind Parallellinien zwischen Parallellinien einander gleich.

Zusatz 2. Also sind auch alle Senkrechten zwischen Parallellinien einander gleich, denn diese Senkrechten sind alle parallel.

§. 62.

Lehrsatz. Wenn man von dem Scheitel A eines Winkels MAN auf den einen Schenkel AM beliebig viele aber gleiche Theile abträgt, nämlich Aa = ab = bc = cd = dB macht und durch die Theilungspunkte a, b, c, d, B parallele Linie zu BC zieht, wo C auf AC willkürlich angenommen ist,

Fig. 55.



also af ∥ bg ∥ ch, dk ∥ BC macht, wodurch der Schenkel AN in den Punkten f, g, h, k, C getroffen wird, so ist AC in diesen Punkten in die nämliche Anzahl unter sich gleicher Theile wie AB getheilt. (Fig. 55.)

Beweis. Es ist ft || gp || hq || kr || AB, also ab = ft (§. 61.) Nun ist auch Aa = ab, folglich jetzt auch Aa = ft.

Ganz auf gleiche Weise läßt sich darthun, daß bc = gp = Aa, daß cd = hq = Aa u. s. w., nämlich daß Aa = ft = gp = hq = kr ist. Nimmt man noch hinzu, daß in den Dreiecken Aaf, ftg, gph, hqk, krC immer x = x und y = y (§. 16.) ist, so folgt, daß alle diese Dreiecke congruent sind (§. 40.) und daß daher auch

$$Af = fg = gh = hk = kC$$

ist.

Zusatz 1. Denkt man sich Aa als das Maß der Geraden AB und Af als das Maß der Geraden AC (§. 32.) so ist Aa eben so oft in AB als Af in AC enthalten; ist z. B. AB = n.Aa, so ist auch AC = n.Af; daher

$$AB : AC = n . Aa : n . Af,$$

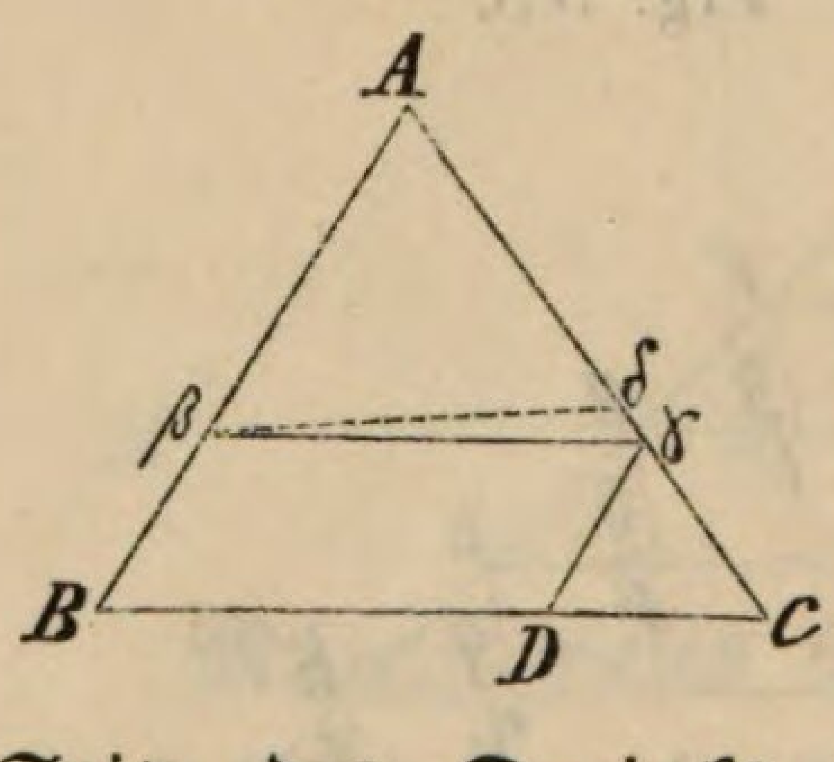
oder $AB : AC = Aa : Af$

Zusatz 2. Ist $AB : AC = Aa : Af$, so muß auch

$AB : AC = 2Aa : 2Af = Ab : Ag$, oder
$AB : AC = 3Aa : 3Af = Ac : Ah$, oder
$AB : AC = 4Aa : 4Af = Ad : Ak$
u. s. w.

Statt finden.

Fig. 56.



Zusatz 3. Wenn man daher (Fig. 56.) durch einen beliebigen Punkt β der einen Seite AB des Dreiecks ABC eine zur zweiten Seite BC parallele Linie $\beta\gamma$ zieht, welche die dritte Seite AC in γ schneidet, so ist durch diese Parallele die erste und dritte Seite des Dreiecks proportional geschnitten; denn es ist $AB : A\beta = AC : A\gamma$.

Gegen die Richtigkeit dieser Schlußfolge läßt sich der Einwand vorbringen, daß das Verhältniß $AB : A\beta$ incommensurabel (§. 32.) seyn kann, da der Punkt β willkürlich, während im Lehrsatz die Verhältnisse Aa : AB; Ac : AB u. s. w. als commensurable angenommen sind.

Darauf läßt sich erwiedern: Ist β kein Theilungspunkt, wenn man AB in n gleiche Theile theilt, so ist die Entfernung des nächsten Theilungspunktes von β kleiner als $\frac{AB}{2n}$ oder höchstens $=\frac{AB}{2n}$. Theilt man aber AB in 2n gleiche Theile, so ist diese Entfernung kleiner oder gleich $\frac{AB}{2n}$, nämlich die Entfernung des nächsten Theilungspunktes um die Hälfte näher, als vorhin. Durch fortgesetztes Verdoppeln der Anzahl der gleichen Theile, in welche AB getheilt wird, wird auch immer die Entfernung des nächsten Theilpunktes von β um die Hälfte vermindert, und da vernunftgemäß (denn wann wollte oder sollte man aufhören?) dieses Verdoppeln ins Unendliche fortgesetzt gedacht werden kann, so kann auch der nächste Theilungspunkt dem Punkt β so nahe gebracht werden, als nur immer verlangt wird. Zwar wird n i e dieser Theilungspunkt mit β zusammen fallen, jedoch kann derselbe dem Punkt β so genähert werden, daß ihre Entfernung kleiner ist, als jede angebliche endliche Größe.

Denkt man sich daher AB in eine unendliche Anzahl gleicher Theile getheilt, so liegt β einem Theilungspunkt so nahe, daß das Verhältniß von $A\beta : AB$ als gleichseyend einem durch solche fortgesetzte Theilung erhaltenen, ohne Irrthum angesehen werden darf.

Zusatz 4. Umgekehrt: Werden in einem Dreieck ABC durch eine Gerade $\beta\gamma$ zwei Seiten AB und AC proportinonal geschnitten, so ist diese Gerade $\beta\gamma$ parallel zur dritten Seite BC. (Fig. 56.)

Denn ist $AB : A\beta = AC : A\gamma$, oder $AB : AC = A\beta : A\gamma$ und es wäre $\beta\gamma \lor BC$, so müßte durch β eine Linie gezogen werden können, die parallel zu BC wäre. Gesetzt, es sey $\beta\delta \parallel BC$, so müßte auch folgende Proportion Statt finden:

$$AB : AC = A\beta : A\delta$$

Nun ist aber $\underline{AB : AC = A\beta : A\gamma}$ (V. D. B.)

also $A\delta = A\gamma$,

welches ungereimt ist, und nur Sinn erhält, wenn wirklich δ auf γ fällt, daher ist $\beta\delta$ nicht, sondern $\beta\gamma \parallel BC$.

Zusatz 5. Weil $AB:A\beta = AC:A\gamma$, so gilt auch

$$AB:(AB - A\beta) = AC:(AC - A\gamma), \text{ oder}$$
$$AB:\beta B = AC:\gamma C, \text{ und}$$
$$AB:AC = \beta B:\gamma C$$

Zusatz 6. Weil $AB:AC = \beta B:\gamma C$, und
$$AB:AC = A\beta:A\gamma$$
so ist auch $A\beta:A\gamma = \beta B:\gamma C$.

Zusatz 7. Ziehet man noch (Fig. 56.) durch γ die Gerade $\gamma D \parallel AB$, so ist $B\beta = \gamma D$ und $\beta\gamma = BD$ (§. 61.).

Nun war nach oben

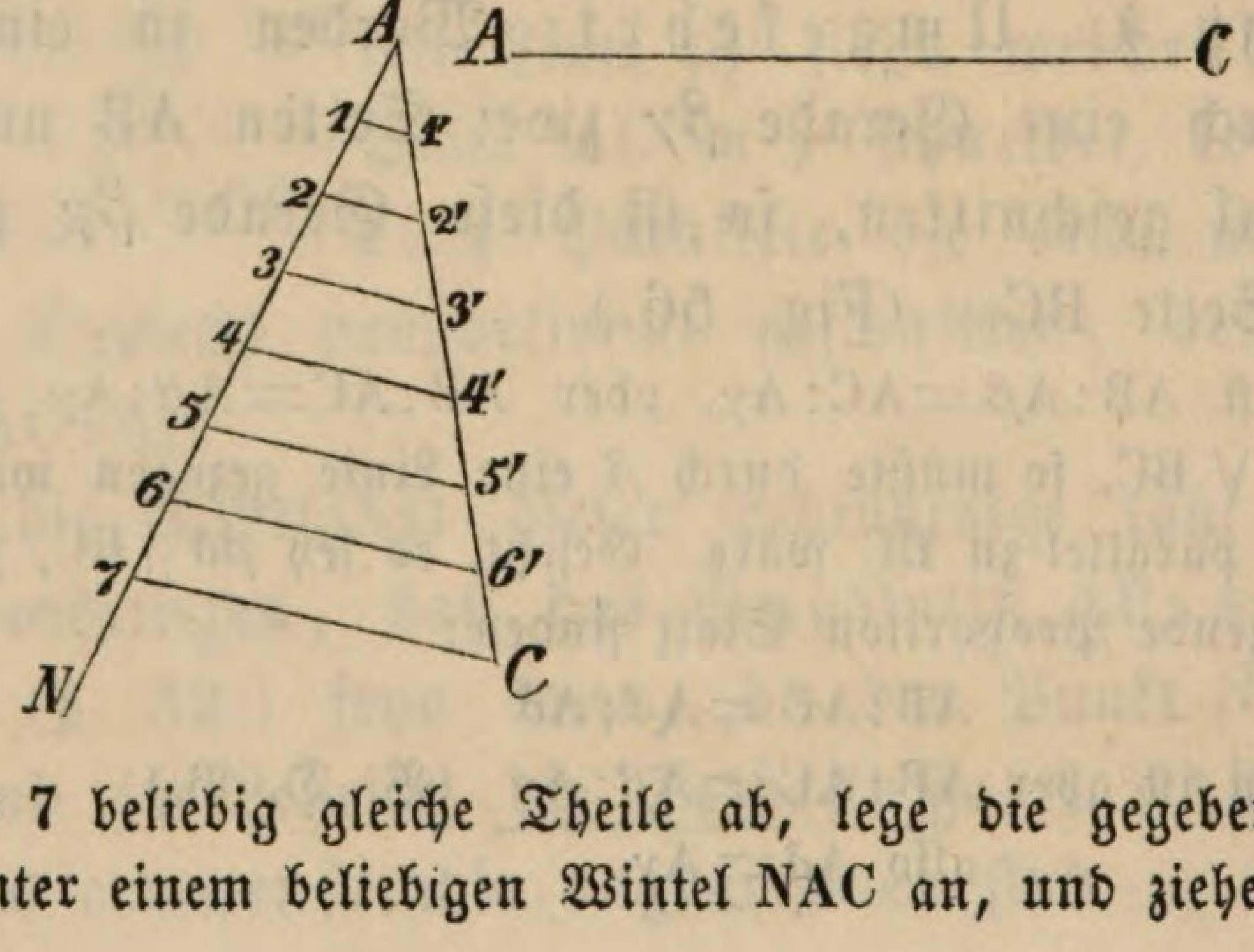
$$AB:AC = A\beta:A\gamma$$
und jetzt $CA:CB = A\gamma:BD$ (weil $\gamma D \parallel AB$)
so ist $AB:CB = A\beta:BD$
Nun ist $BD = \beta\gamma$
deshalb $AB:BC = A\beta:\beta\gamma$, oder
$$AB:A\beta = BC:\beta\gamma \text{ und}$$
$$A\beta:AB = \beta\gamma:BC.$$

§. 63.

Aufgabe. Jede Gerade AC in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, z. B. in 7 gleiche Theile, zu theilen.

Auflösung I. Auf einer Geraden AN (Fig. 57.) trage man von

Fig. 57.

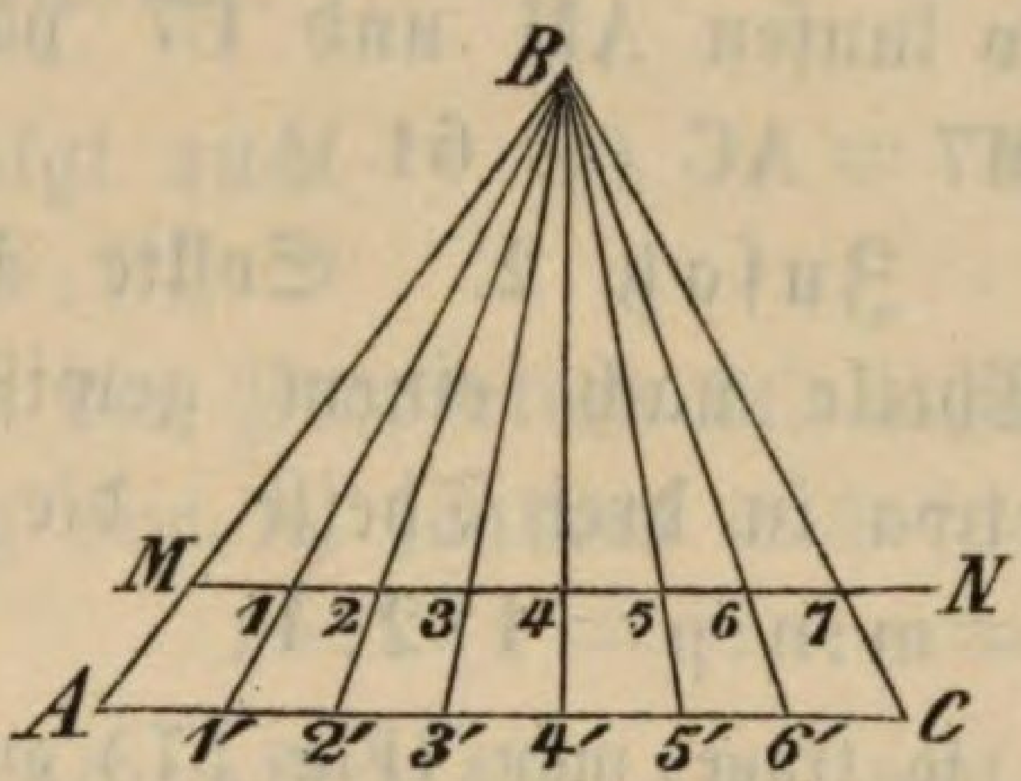


A aus 7 beliebig gleiche Theile ab, lege die gegebene Gerade AC unter einem beliebigen Winkel NAC an, und ziehe durch den

letzten Theilungspunkt 7 die Gerade 7C, und durch die Theilungspunkte 6, 5, 4, 3, 2, 1, Parallele zu 7C, welche AC in den Punkten 6′, 5′, 4′, 3′, 2′, 1′ schneiden, so ist in diesen Punken AC in die verlangten 7 gleiche Theile getheilt.

Beweis. Folgt unmittelbar aus Lehrsatz §. 62.

Fig. 58.



Auflösung II. Man ziehe (Fig. 58.) zur gegebenen Geraden AC irgend eine andere Gerade MN parallel, trage auf dieser von M aus 7 gleiche Theile ab, ziehe durch A und M, so wie durch C und den letzten Theilungspunkt 7 die Geraden AB und BC, welche sich in B treffen und ziehe B1, B2, B3, B4..., welche alle verlängert die gegebene AC in den Punkten 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′ schneiden. Durch diese jetzt erhaltenen Punkte ist AC in die verlangten 7 gleichen Theile getheilt.

Beweis. Nach §. 62. Z. 7. ist $BM:BA = M1:A1'$

ferner $BM:BA = M2:A2'$

folglich $M1:A1' = M2:A2'$, oder

$M1:M2 = A1':A2'$;

$M1:M2 = 1:2$ (B. D. C.)

folglich $A1':A2' = 1:2$

also $A2' = 2.A1'$

Eben so läßt sich erweisen, daß

$A1':A3' = 1:3$

oder daß $A3' = 3.A1'$ ist.

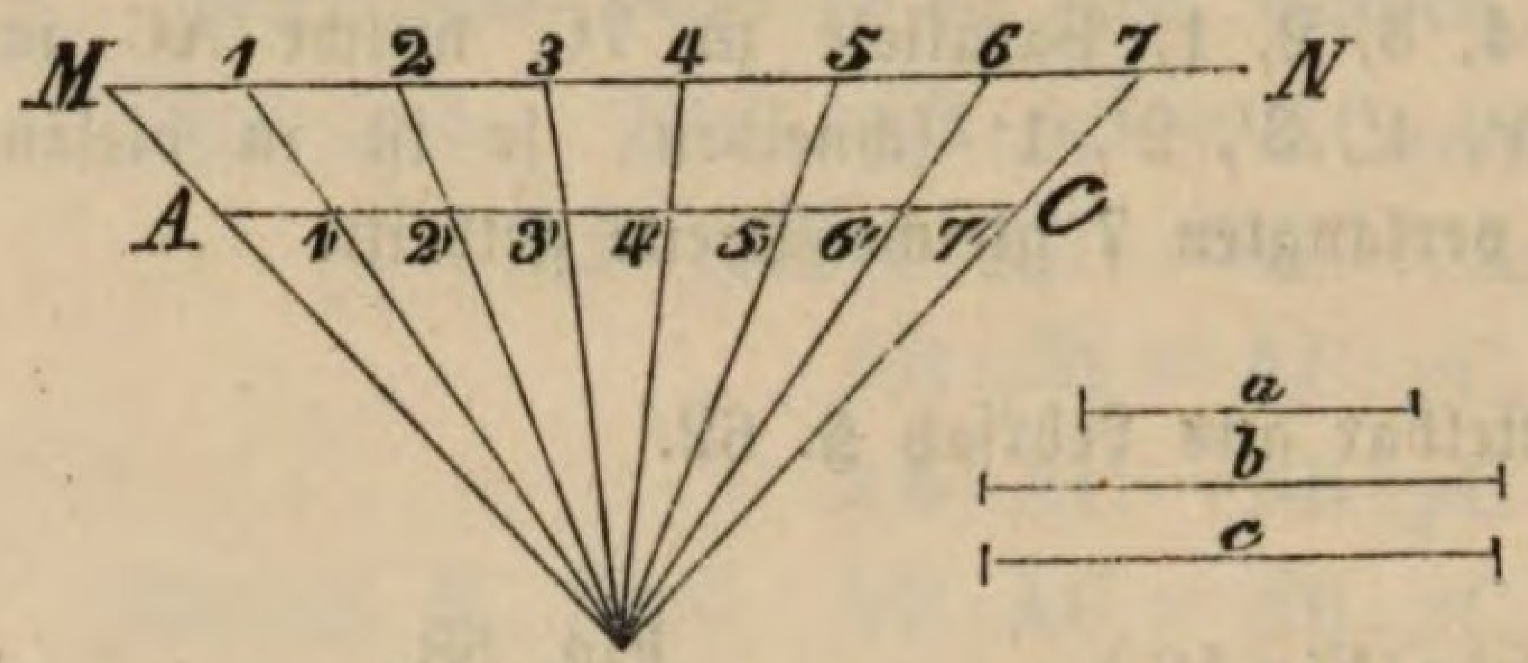
Ferner daß $A1':A4' = 1:4$

oder daß $A4' = 4.A1'$ ist;

und überhaupt, daß AC in die verlangten 7 gleichen Theile getheilt ist.

Zusatz 1. Der Durchschnitt B erfolgt oberhalb AC, wenn $\angle BAC + \angle BCA < 2R$ (§. 15 Z. 2.), alsdann ist $M7 < AC$; der Durchschnitt erfolgt unterhalb AC, wenn $\angle BAC + \angle BCA > 2R$ (§. 15. Z. 2.); in diesem Falle ist

Fig. 59.



M7 > AC (Fig. 59.). Erfolgt aber, bei gehöriger Verlängerung, weder oberhalb noch unterhalb von AC ein Durchschnitt, so laufen AM und C7 parallel (§. 14.) und alsdann ist M7 = AC (§. 61.).

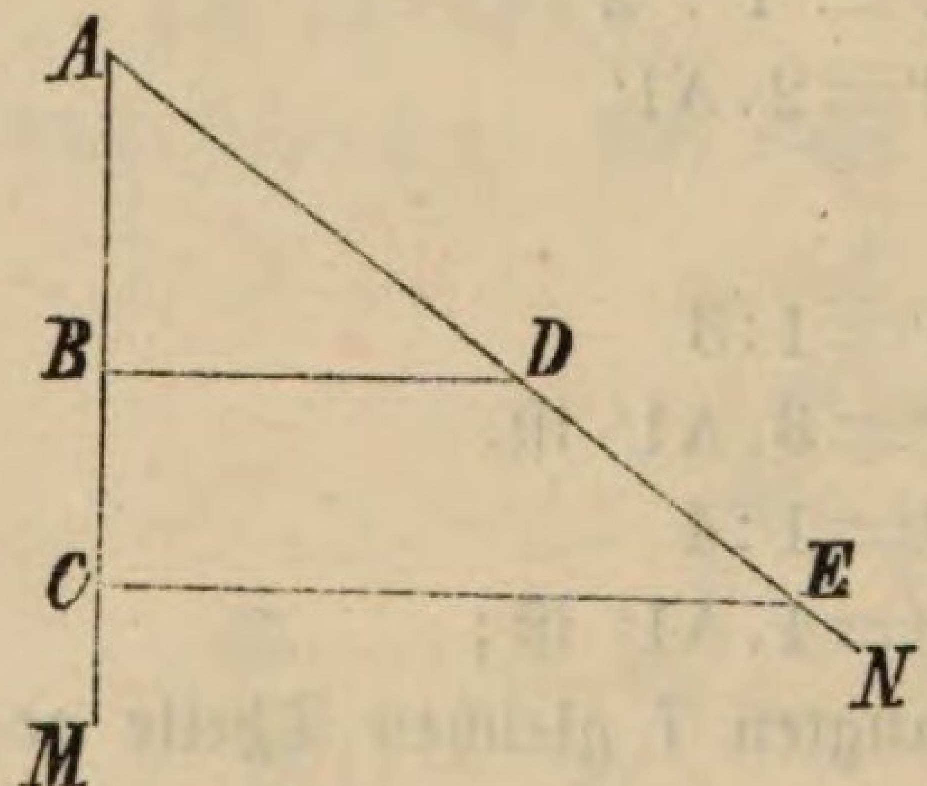
Zusatz 2. Sollte die Gerade AC in eine Anzahl Theile nach einem gewissen Verhältniß getheilt werden, etwa in drei Theile, die sich zu einander verhalten sollen = m:n:p = 1:2:4;

so trage man (Fig. 57.) auf AN m + n + p (hier 1 + 2 + 4 = 7) gleiche Theile ab und ziehe durch den 1sten, 3ten, 7ten Theilungspunkt die Parallelen zu 7C.

Denn alsdann ist A1 : 13 : 37 = A1' : 1'3' : 3'7'. Es ist aber 13 = 2 . A1 und 37 = 4 . A1, daher A1 : 13 : 37 = A1 : 2 . A1 : 4 . A1 = 1 : 2 : 4; also auch A1' : 1'3' : 3'7, = 1 : 2 : 4 und AC in den Punkten 1', 3', 7' wie verlangt getheilt.

§. 64.

Fig. 60.



Aufgabe. Zu drei gegebenen Linien die vierte geometrische Proportionale zu finden. (Fig. 60.)

Auflösung. Es seyen a, b, c die drei gegebenen Linien, so soll folgende Proportion a : b = c : x gezeichnet werden.

Auf dem einen Schenkel AM eines beliebigen Winkels MAN trage man vom Scheitel A aus, AB = a und AC = b; auf dem andern Schenkel AN ferner AD = c, ziehe BD und endlich CE || BD, so ist AE die verlangte vierte Proportionale.

Beweis. Vermöge (§. 62.) ist AB : AC = AD : AE, oder

a : b = c : x

Zusatz 1. Aus der Proportion $a:b=c:x$ folgt

$$x=\frac{bc}{a}=AE$$

Stellen a, b, c, x Linien vor, so läßt sich nun die Gleichung $x=\frac{bc}{a}$ construiren, nämlich es läßt sich jetzt eine Linie x finden, die obigem Ausdruck $\frac{bc}{a}$ gleich ist.

Zusatz 2. Aus der Figur folgt auch

$$AB:BC=AD:DE$$

d. h. man kann das zweite Glied der Proportion BC nicht bloß wie in der obigen Auflösung von A, sondern auch sogleich von B weiter tragen.

Zusatz 3. Eben so ist auch $AC:AB=AE:AD$; welches eine Proportion zeigt, in welcher das erste Glied (die erste gegebene Linie) größer als das zweite Glied (die zweite gegebene Linie) ist

Zusatz 4. Es ist auch endlich $AB:AD=AC:AE$; eine Proportion, in welcher das erste und dritte Glied auf dem einen Schenkel und das zweite und vierte Glied auf dem andern Schenkel des beliebig angenommenen Winkels abgetragen wurde.

§. 65.

Aufgabe. Zu zwei gegebenen Linien die dritte geometrische Proportionale zu finden.

Auflösung. Es seyen a, b die zwei gegebenen Linien, so soll folgende Proportion $a:b=b:x$ construirt werden.

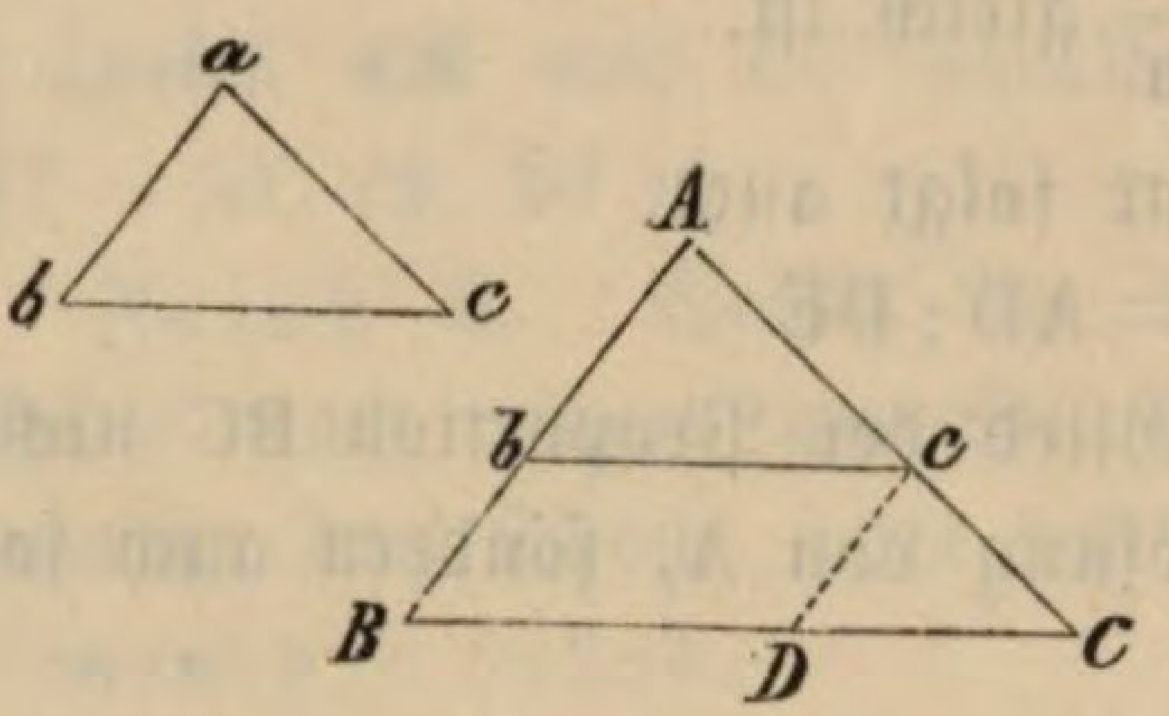
Dieses geschieht auf eine der im vorigen §. angegebenen Arten, nur mit der einzigen Berücksichtigung, daß hier $b=c$ wird.

Zusatz. Aus der Proportion $a:b=b:x$ folgt $x=\frac{bb}{a}$. Stellen nun a, b, x Linien vor, so läßt sich jetzt die Glei-

chung $x = \frac{bb}{a}$ construiren, d. h. es läßt sich eine Linie x zeichnen, die dem Ausdruck $\frac{bb}{a}$ gleich ist.

§. 66.

Fig. 61.



Lehrsatz. Wenn zwei Dreiecke gleichwinkelig sind, so stehen die Seiten, die den gleichen Winkeln gegenüberliegen, in Proportion. (Fig. 61.)

Bedingung.	Behauptung.
A = a	AB : ab = AC : ac = BC : bc.
B = b	
C = c	

Beweis. Man lege das Dreieck abc so auf das Dreieck ABC, daß die Schenkel zweier gleicher Winkel sich decken, z. B. a auf A, so daß ab in die Richtung von AB und ac in die Richtung von AC fällt, so ist △Abc ≌ △abc (§. 38.), und weil b = B so ist bc || BC (§. 15.), und daher

AB : Ab = AC : Ac (§. 62. Z. 3.), oder

1) AB : ab = AC : ac

Zieht man cD || AB, so ist nach (§. 62. Z. 7.

AC : Ac = BC : bc, oder

2) AC : ac = BC : bc,

und durch Verbindung der Proportionen 1 und 2, gilt auch

3) AB : ab = BC : bc.

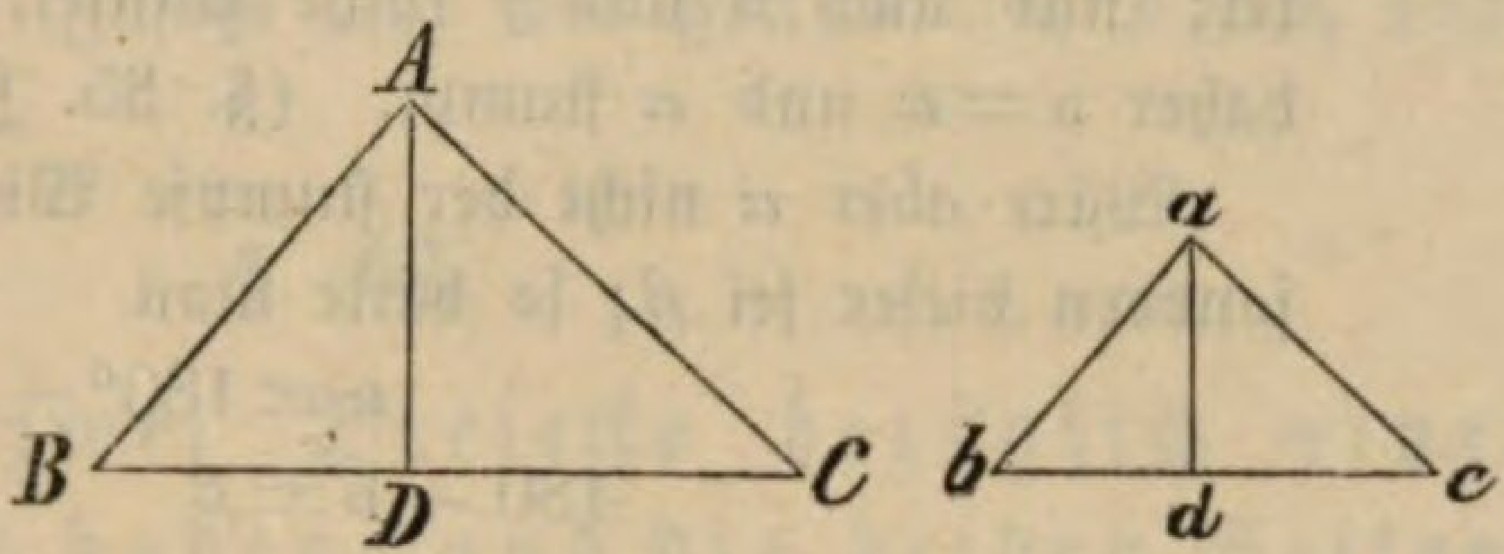
Zusatz 1. Also sind zwei Dreiecke einander ähnlich (§. 33.), wenn sie gleichwinkelig sind. Um die Aehnlichkeit zweier Dreiecke zu beweisen, darf also bloß dargethan werden, daß sie zwei Winkel bezüglich gleich haben.

Zusatz 2. Alle gleichseitigen Dreiecke, so wie alle rechtwinkeligen und zugleich gleichschenkeligen Dreiecke sind einander ähnlich.

Zusatz 3. Zwei gleichschenkelige Dreiecke sind einander ähnlich, wenn beide einen Winkel an der Grundlinie oder den Winkel an der Spitze bezüglich gleich haben.

Zusatz 4. Fällt man aus den Spitzen gleicher Winkel zweier ähnlicher Dreiecke Senkrechte auf die gegenüberliegenden Seiten, so sind auch diese Senkrechten, oder die Höhen dieser Dreiecke, den Seiten derselben proportionirt. (Fig. 62.)

Fig. 62.

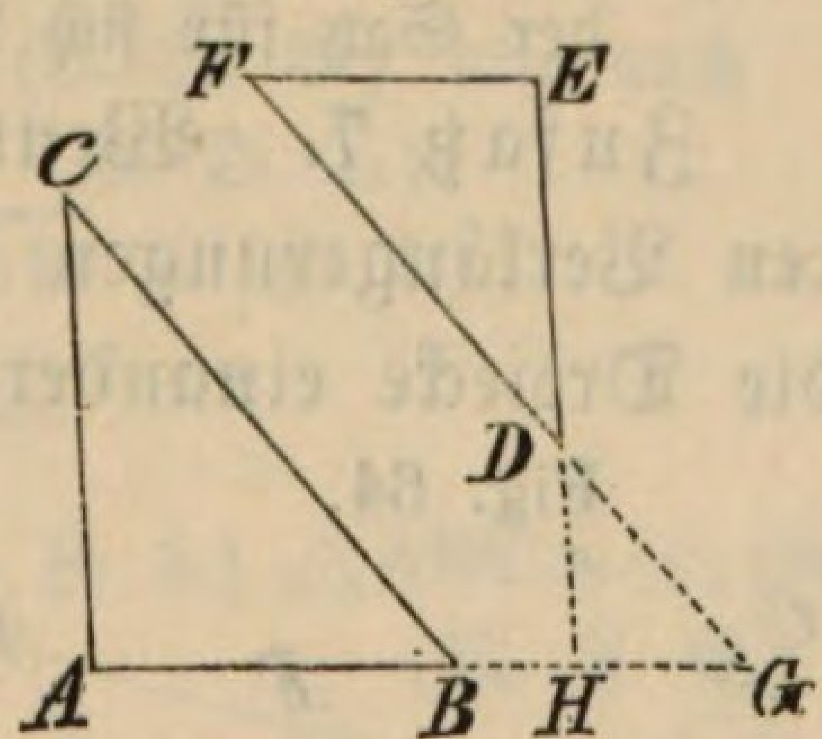


Denn $\triangle ABD \sim \triangle abd$ und $\triangle ADC \sim \triangle adc$; daher $AB : ab = AD : ad$, und auch $AC : ac = AD : ad$; und weil $AB : ab = BC : bc$, so ist jetzt auch $BC : bc = AD : ad$.

Zusatz 5. Weil ferner $AB : ab = BD : bd$ und $AC : ac = DC : dc$, so ist auch, da $AB : ab = AC : ac$ Statt findet, $BD : bd = DC : dc$; d. h. in ähnlichen Dreiecken werden die Grundlinien von den Höhen den anliegenden Seiten proportionirt geschnitten; ferner sind diese Segmente sich selbst proportionirt.

Zusatz 6. Wenn die Seiten zweier Dreiecke wechselseitig parallel laufen, so sind diese Dreiecke einander ähnlich.

Fig. 63.



Denn (Fig. 63.) man verlängere AB, FD, ED bis Durchschnittspunkte erfolgen, sobann ist $\angle B = \angle G = \angle F$ (§. 16.) und $\angle E = \angle H = \angle A$, also $\triangle ABC \sim \triangle EFD$.

Um einen allgemeinen Beweis zu geben, der für alle Lagen, die die beiden Dreiecke gegenseitig einnehmen können, Geltung hat, bezeichne man die 3 Winkel des einen Dreiecks mit a, b, c und die 3 Winkel des andern Dreiecks mit α, β, γ, wo zugleich a und α, ebenso b und β, so wie c und γ bezüglich von den parallelliegenden Seiten gebildet sein sollen.

Nach §. 16. Z. 7. muß

$$a = \alpha \text{ oder } a = 180^0 - \alpha$$
$$b = \beta \text{ oder } b = 180^0 - \beta$$
$$c = \gamma \text{ oder } c = 180^0 - \gamma$$

Statt finden. Nun kann im Dreieck nur ein stumpfer Winkel existiren (§. 35. Z. 4.); sey dieser a, so sind b und c spitze Winkel; sind auch β und γ spitze Winkel, so ist $b = \beta$ und $c = \gamma$, daher $a = \alpha$ und α stumpf. (§. 35. Z. 6.)

Wäre aber α nicht der stumpfe Winkel des andern Dreiecks, sondern dieser sei β; so hätte man

$$a = 180^0 - \alpha$$
$$180 - b = \beta$$
$$c = \gamma$$

Mithin $a - b + c = -\alpha + \beta + \gamma$

Es ist aber $a + b + c = \alpha + \beta + \gamma$

folglich $2b = 2\alpha$

oder $b = \alpha$

Setzt man diesen Werth in die Annahmen

$$a = 180^0 - \alpha$$
$$\text{und } \beta = 180^0 - b$$

ein, so wäre

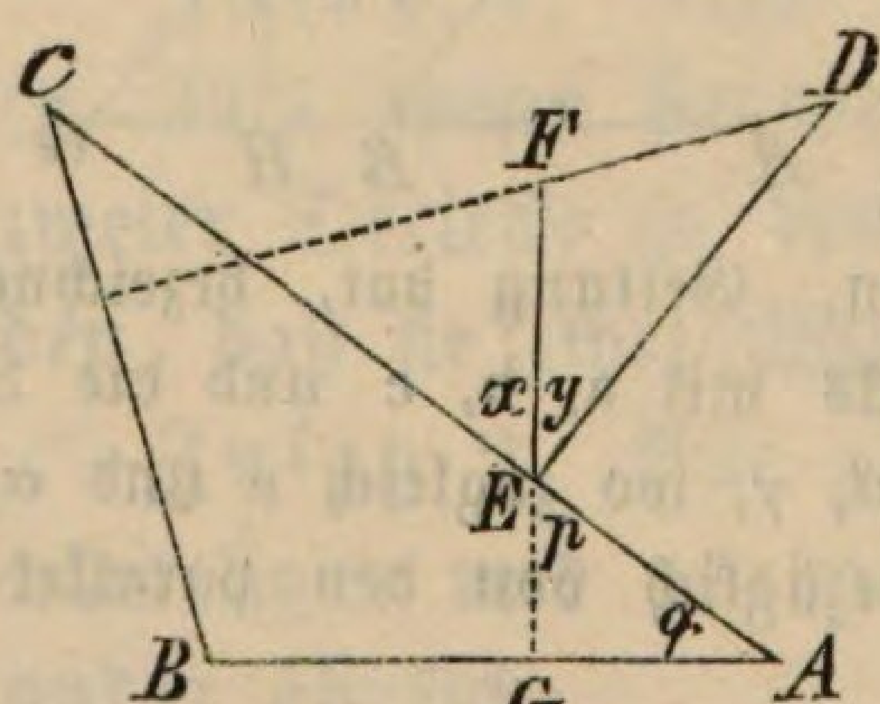
$$a = 180^0 - b; \text{ oder } a + b = 180^0 \text{ und}$$
$$\beta = 180^0 - \alpha; \text{ oder } \alpha + \beta = 180^0,$$

was offenbar gegen §. 35. Z. 3. Wenn daher a der stumpfe Winkel in dem einen Dreieck ist, so muß der entsprechende Winkel α im andern Dreieck ebenfalls stumpf, d. h. $a = \alpha$ seyn und da jetzt b, c, β, γ spitze Winkel sind, so sind die Dreiecke gleichwinkelig, d. h. ähnlich.

Sind aber alle sechs Winkel der beiden Dreiecke spitz, so ist der Satz für sich klar.

Zusatz 7. Wenn die Seiten zweier Dreiecke oder deren Verlängerungen senkrecht auf einander stehen, so sind die Dreiecke einander ähnlich.

Fig. 64.



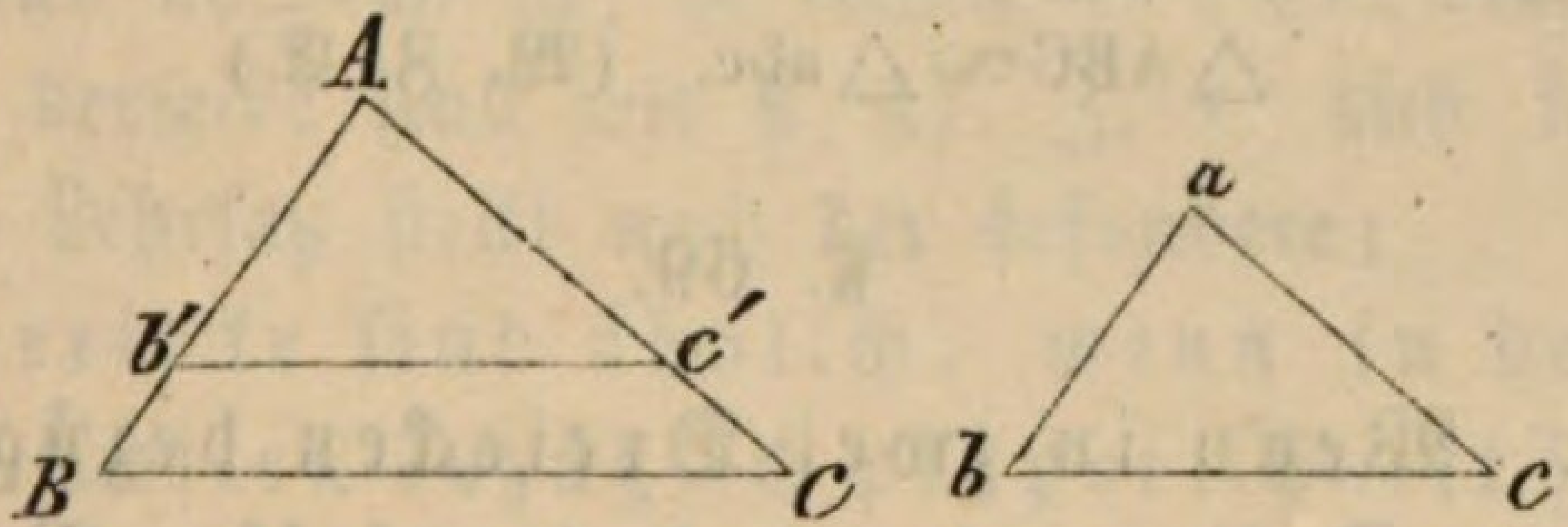
Denn (Fig. 64.) es sey DE ⊥ AC, FE ⊥ AB, DF ⊥ BC, so ist $x + y = R$ und $x = p$; folglich $p + y = R$; nun ist aber auch $p + q = R$ (weil ∠ AGE = R), folglich $q = y$; d. h. ∠ A = ∠ E. Aus ganz ähnlichen Gründen ist auch ∠ C = ∠ D, folglich △ ABC ∾ △ EFD.

Zwei Dreiecke, deren Seiten oder Seitenverlängerungen auf einander senkrecht stehen, können gegen einander sehr verschiedene Lagen haben. Um einzusehen, daß unter den gegebenen Bedingungen diese Dreiecke immer die bezüglichen Winkel gleich haben müssen, überlege man, daß (nach §. 16. Z. 6) die bezüglichen Winkel entweder gleich sind oder einander zu 2R ergänzen, und daß nach vorigem Zusatze nur der Fall $a=\alpha$, $b=\beta$, $c=\gamma$ möglich ist.

§. 67.

Lehrsatz. Wenn zwei Dreiecke bezüglich einen Winkel gleich haben, und die beiden Seiten, die diesen Winkel einschließen, in Proportion stehen, so sind diese Dreiecke einander ähnlich. (Fig. 65.)

Fig. 65.



Bedingung.	Behauptung.
A = a	$\triangle$ ABC ∾ $\triangle$ abc.
AB : AC = ab : ac.	

Beweis. Man mache Ab' = ab Ac' = ac und weil A = a, so ist $\triangle$ Ab'c' ≌ $\triangle$ abc (§. 38.), also $\angle$ Ab'c' = $\angle$ abc. Nun ist

AB : AC = ab : ac (B. D. B.), also auch

AB : AC = Ab' : Ac' (B. D. C.)

$\angle$ ABC = $\angle$ Ab'c' (§. 62. Z. 4.)

Da aber $\angle$ Ab'c' = $\angle$ abc

daher $\angle$ ABC = $\angle$ abc

und da ohnedies A = a, so ist (§. 66. Z. 1.) $\triangle$ ABC ∾ $\triangle$ abc. (W. Z. E.)

§. 68.

Lehrsatz. Wenn zwei Dreiecke die drei Seiten wechselweise proportionirt haben, so sind diese Dreiecke einander ähnlich. (Fig. 65.)

Bedingung.
1) AB : AC = ab : ac
2) AB : BC = ab : bc
3) AC : BC = ac : bc.

Behauptung.
△ABC ∾ △abc.

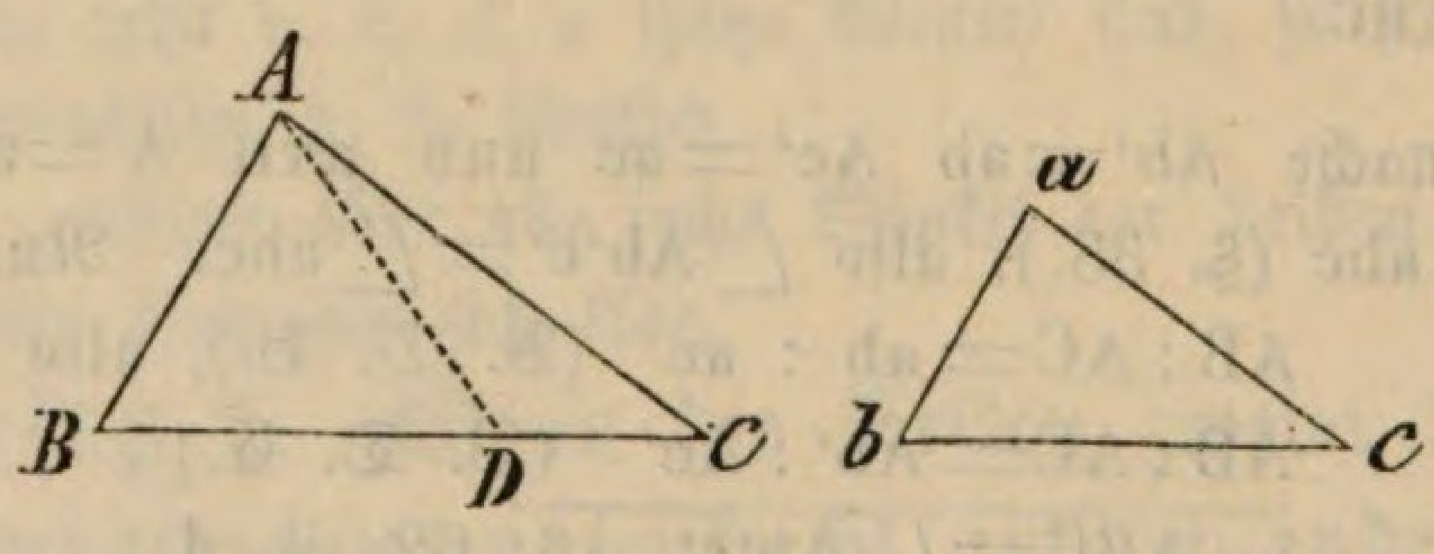
Beweis. Man mache Ab′ = ab und ziehe b′c′ ∥ BC, so ist
AB : AC = Ab′ : Ac′ (§. 62. Z. 3.)
Nun ist auch AB : AC = ab : ac (B. D. B.)
daher Ab′ : Ac′ = ab : ac
Es ist aber Ab′ = ab (B. D. C.); folglich auch Ac′ = ac.
Ferner ist AB : BC = Ab′ : b′c′ (§. 62. Z. 7.)
da aber auch AB : BC = ab : bc (B. D. B.)
so ist Ab′ : b′c′ = ab : bc
Es ist Ab′ = ab; also auch b′c′ = bc.

Da wir nun gesehen haben, daß Ac′ = ac; b′c′ = bc und Ab′ = ab ist, so ist △Ab′c′ ≌ △abc (§. 42.) und da △ABC ∾ △Ab′c′, so ist jetzt auch
△ABC ∾ △abc. (W. Z. E.)

§. 69.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken bezüglich zwei Paar Seiten ein und dasselbe Verhältniß haben und die Winkel, die dem einen Paare dieser Seiten gegenüber liegen, gleich, die Winkel, die dem andern Paare dieser Seiten gegenüber liegen hingegen zusammen genommen ≷ 2R sind, so hat das dritte Paar Seiten dasselbe Verhältniß, oder diese zwei Dreiecke sind ähnlich. (Fig. 66.)

Fig. 66.



Bedingung.
AB : AC = ab : ac
B = b
C + c ≷ 2R.

Behauptung.
△ABC ∾ △abc.

Beweis. Wäre $\triangle ABC$ nicht $\sim \triangle abc$, so müßte $AB : BC \gtrless ab : bc$ seyn (Vergl. §. 68.). Angenommen es wäre $AB : BC > ab : bc$, nämlich $AB : BD = ab : bc$ fände Statt, und weil $B = b$ (B. D. B.), so wäre jetzt (§. 67.) $\triangle ABD \sim \triangle abc$; daher $\angle ADB = \angle c$ und auch $AB : AD = ab : ac$. Es ist aber auch (B. D. B.) $AB : AC = ab : ac$, folglich wäre $AC = AD$. Es wäre also $\triangle ADC$ gleichschenkelig; mithin (§. 44.) $\angle ACD = \angle ADC$. Nun ist $\angle ADB + \angle ADC = 2R$ (§. 7.); folglich auch $\angle ADB + ACB = 2R$, nämlich $c + C = 2R$. Dieses ist aber gegen die Bedingung; daher $AB : BC \gtrless ab : bc$ nicht Statt finden kann, es muß also $AB : BC = ab : bc$ seyn. Nimmt man noch $AB : AC = ab : ac$ (B. D. B.) zu Hülfe, so ergibt sich auch $BC : AC = bc : ac$, d. h. (§. 68.) $\triangle ABC \sim \triangle abc$. (W. Z. E.)

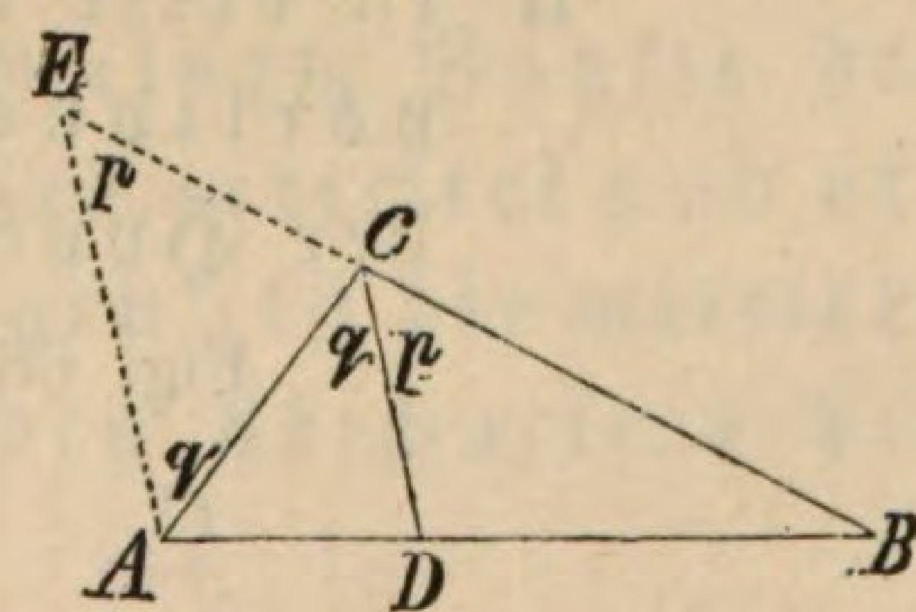
Zusatz. So wie B, und also auch b, entweder $> R$, oder $= R$ ist, oder so wie $B > C$ und $b > c$, also auch $AC > AB$ und $ac > ab$ ist, ist immer $C + c < 2R$, nämlich es ist hier derselbe Fall wie §. 47. Z. 1. und im obigen allgemeinen Lehrsatz steckt noch der besondere:

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in denselben zwei Seiten bezüglich proportionirt sind und wenn sie dazu einen Winkel gleich haben, der einer dieser Seiten gegenüberliegt, dieser Winkel aber entweder ein stumpfer oder ein rechter ist, oder der größern proportionirten Seite gegenüberliegt.

§. 70.

Lehrsatz. Wenn man in einem Dreieck einen Winkel halbirt, so schneidet die Halbirungslinie die, diesem Winkel gegenüberliegende Seite in zwei, den einschließenden Seiten proportionirte Stücke. (Fig. 67.)

Fig. 67.



Bedingung.
$\angle ACD = \angle BCD$.

Behauptung.
$AD : DB = AC : CB$.

Beweis. Es sey durch CD der Winkel ACB halbirt, verlängert man BC so, daß CE = AC wird, und zieht AE, so ist p = q (§. 44.), ferner ∠ ACB = p + q (§. 35.) oder ∠ ACB = 2q, also ½ ∠ ACB = q, und daher, weil ∠ ACD = ∠ DCB (V. D. V.), ist ACD = ½ ∠ ACB = q, mithin AE || DC (§. 15.), folglich (§. 62. Z. 3.) ist AD : DB = EC : CB, und weil CE = AC (V. D. C.), so ist auch AD : DB = AC : CB. (W. Z. E.)

Zusatz 1. Findet in einem △ ABC folgende Proportion Statt:

$$AD : DB = AC : CB$$

so ist der Winkel ACB durch CD halbirt.

Denn läßt man (Fig. 67. a.) die nämliche Construction gelten, so ist auch AD : DB = CE : CB, (wenn in der gegebenen Proportion CE = AC gesetzt wird) d. h. CD || AE (§. 62. Z. 4.), folglich ∠ ACD = ∠ CAE (§. 16.) und auch ∠ DCB = ∠ AEC (§. 16.). Weil aber ∠ CAE = ∠ AEC (§. 44.), so ist auch ∠ ACD = ∠ DCB, d. h. ∠ ACB ist durch CD halbirt.

Zusatz 2. Ist △ ACB gleichschenkelig, nämlich AC = BC, so ist ∠ CDB = R (§. 57. I.) also auch ∠ EAB = R.

Vergleiche diesen Satz mit §. 60. Z. 5.

§. 71.

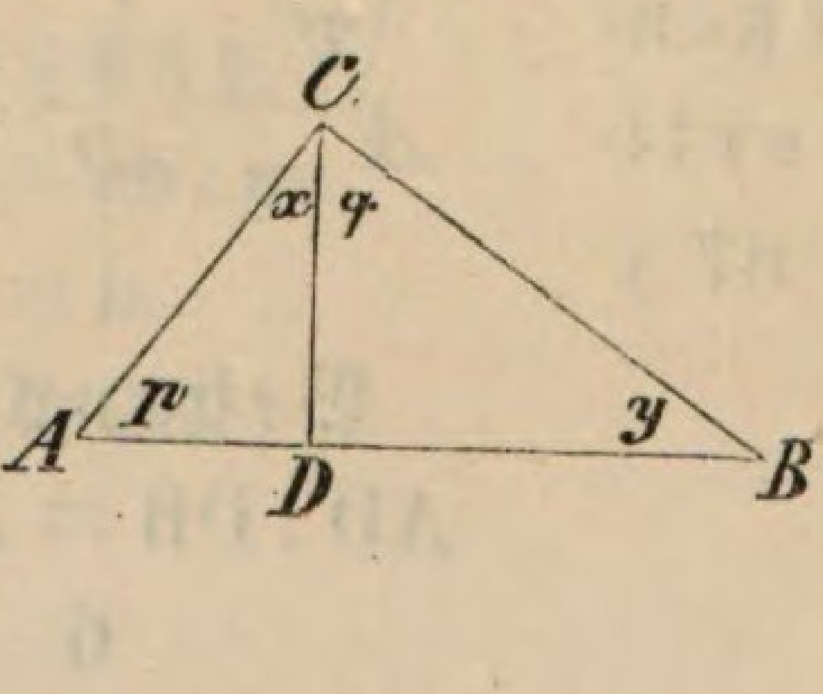
Lehrsatz. Wenn man in einem rechtwinkeligen Dreieck aus der Spitze des rechten Winkels auf die gegenüber liegende Hypotenuse eine Senkrechte fällt, so

I. wird das Dreieck in zwei andere Dreiecke, welche sowohl dem ganzen Dreieck, als auch unter sich ähnlich sind, getheilt;

II. ist diese Senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse;

III. ist jede Kathete die mittlere Proportionale zwischen der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt. (Fig 68.)

Fig. 68.



Bedingung.	Behauptung.
$\angle ACB = R$	I. $\triangle ACD \backsim \triangle ABC \backsim \triangle BCD$
$CD \perp AB$	II. $AD : DC = DC : DB$
	III. $AD : AC = AC : AB$
	$BD : BC = BC : AB.$

Beweis. I. Vergleicht man $\triangle ACD$ mit $\triangle ABC$, so ergibt sich sogleich, daß beide rechtwinkelig sind und den Winkel A gemeinschaftlich haben, also auch $x = y$ ist, oder $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$ (§. 66. Z. 1.)

Eben so ergibt sich, wenn man $\triangle BCD$ mit $\triangle ABC$ vergleicht, daß beide Dreiecke rechtwinkelig sind und den Winkel B gemeinschaftlich haben, daher ist auch $q = p$, und $\triangle BCD \backsim \triangle ABC$.

Weil nun $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$ und $\triangle BCD \backsim \triangle ABC$, so muß auch $\triangle ACD \backsim \triangle BCD$ seyn.

II. Weil $\triangle ACD \backsim \triangle BCD$, so ist

$$AD : DC = DC : DB$$

d. h. die Senkrechte ist die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse.

III. Weil $\triangle ACD \backsim \triangle ABC$, so ist

$$AD : AC = AC : AB$$

d. h. die Kathete ist die mittlere Proportionale zwischen dem anliegenden Abschnitt und der Hypotenuse.

Eben so ist, weil $\triangle BCD \backsim \triangle ABC$,

$$DB : BC = BC : AB.$$

Zusatz. Weil sich um jedes rechtwinkelige Dreieck ein Kreis beschreiben läßt (§. 60. Z. 1.), dessen Durchmesser die Hypotenuse dieses Dreiecks ist, so gehen obige zwei Sätze in folgende über.

I. Die Senkrechte in irgend einem Punkte des Durchmessers eines Kreises errichtet und bis an seine Peripherie gezogen, ist die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten des Durchmessers.

II. Die Sehne im Kreise ist die mittlere Proportionale zwischen dem anliegenden Abschnitt und dem Durchmesser.

§. 72.

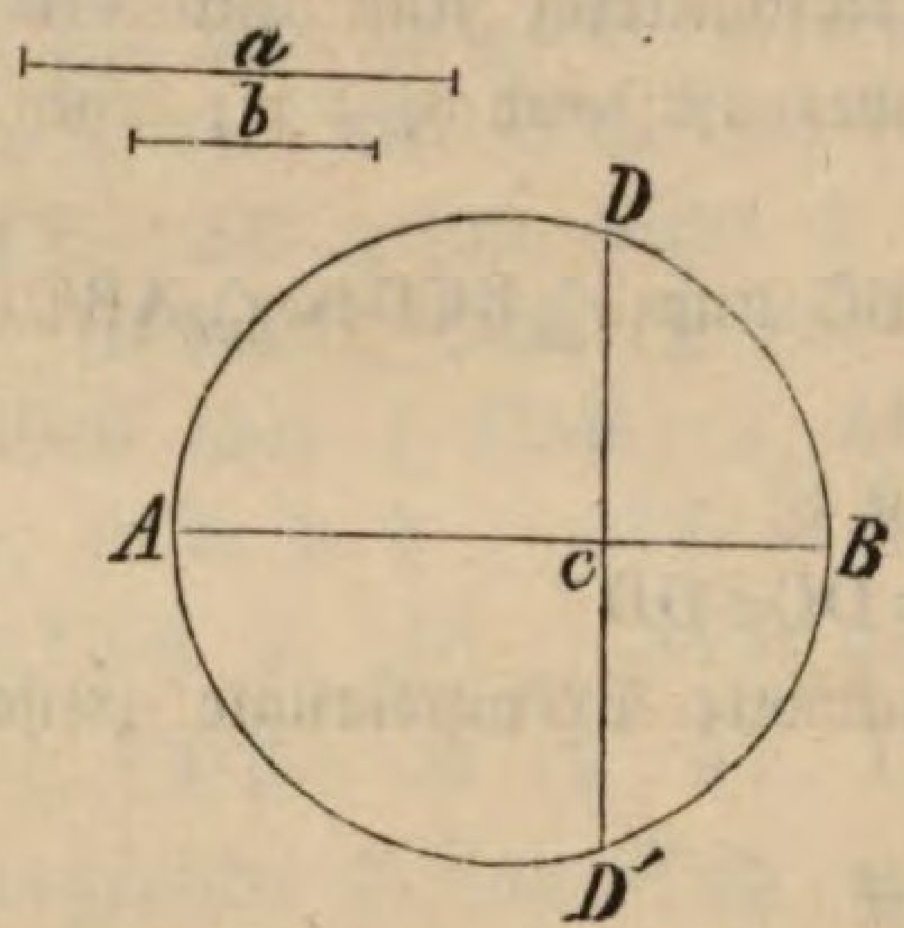
Aufgabe. Zu zwei gegebenen geraden Linien die mittlere geometrische Proportionale zu finden.

Auflösung I. Es seyen die beiden gegebenen Geraden a, b, so soll folgende Proportion

$$a : x = x : b$$

construirt werden.

Fig. 69.



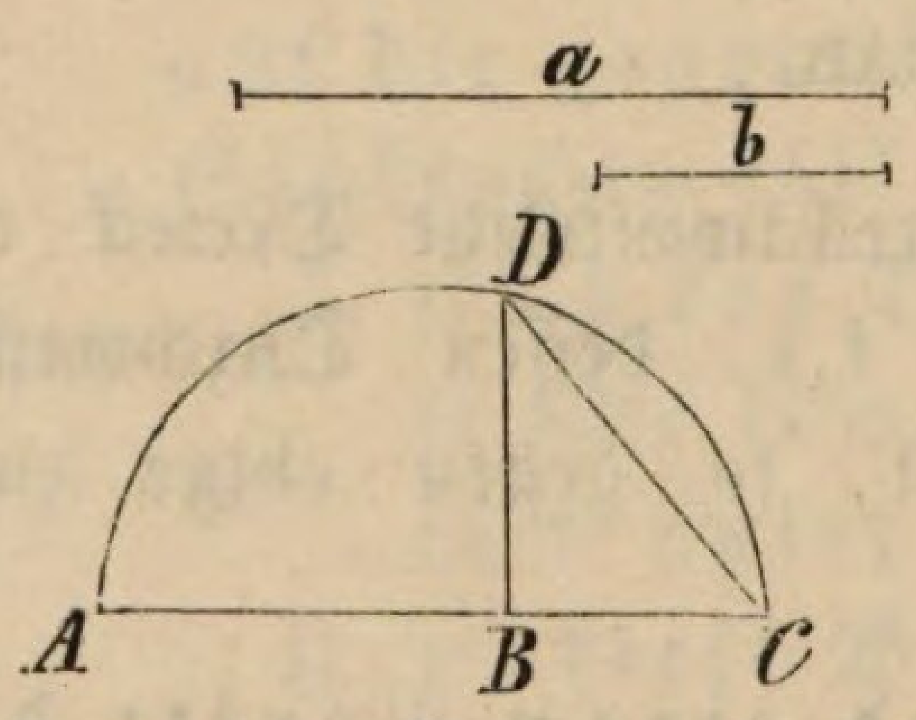
Man beschreibe (Fig. 69.) über eine Gerade $AB = AC + CB = a + b$, als über einen Durchmesser, einen Halbkreis, errichte im Punkt C eine Senkrechte, bis diese die Peripherie des Kreises in D schneidet, so ist CD die verlangte mittlere geometrische Proportionale.

Beweis. Nach §. 71. Zusatz ist

$$AC : CD = CD : BC$$

oder $a : x = x : b$.

Fig. 70.



Auflösung II. Man construire (Fig. 70.) einen Halbkreis, dessen Durchmesser $= AC = a =$ der größern gegebenen Linie ist, mache $BC = b =$ der kleinern gegebenen Linie, errichte $DB \perp AC$ und ziehe CD, so ist CD die gesuchte mittlere geometrische Proportionale.

Beweis. Nach §. 71. Zusatz ist

$$AC : CD = CD : CB$$

oder $a : x = x : b$.

Zusatz. Aus der Proportion

$a : x = x : b$ folgt, daß

$$x^2 = ab$$

und $x = \pm \sqrt{ab}$.

Bezeichnen a, b, x Linien, so sind wir jetzt im Stande,

eine Linie x zu zeichnen, die dem Ausdruck $+\sqrt{ab}$ gleich ist; wobei jedoch bemerkt werden muß, daß hier die Linie x zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe hat, was auch in der Construction wirklich der Fall ist. Denn vollendet man den Kreis (Fig. 68.) und verlängert die Senkrechte CD rückwärts, so ist CD = CD'.

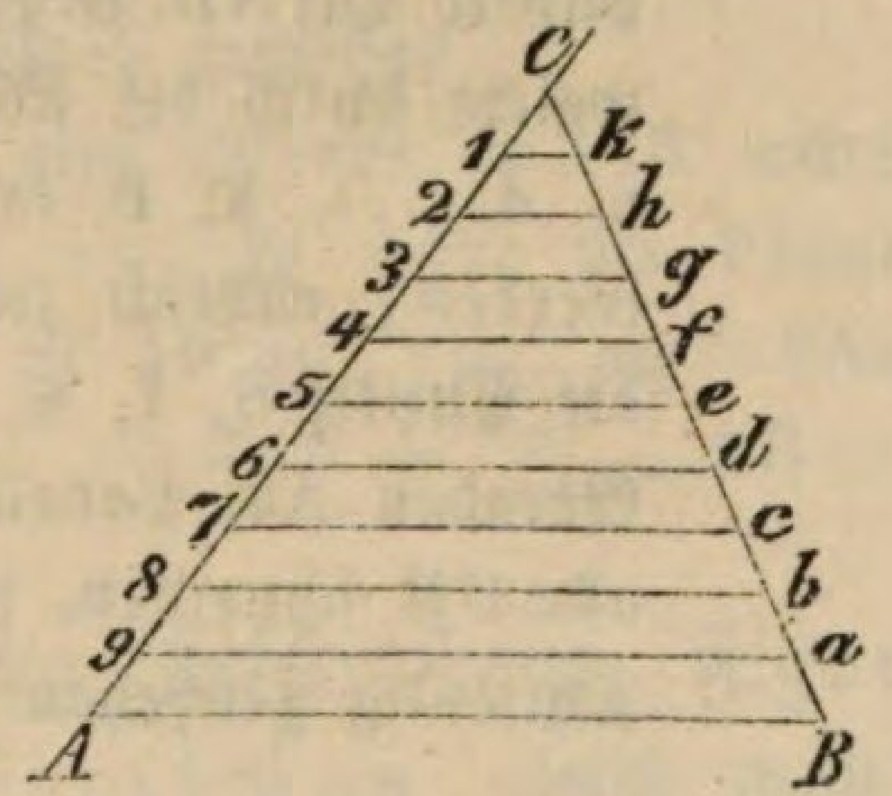
Ist nun CD = +x, so ist CD' = —x, der entgegengesetzten Lage der Linie wegen.

§. 73.

Aufgabe. Gerade Linien zu zeichnen, die von einer gegebenen Geraden gewisse Theile betragen.

Auflösung. Es seyen gerade Linien zu zeichnen, die von der gegebenen Geraden AB $^9/_{10}$, $^8/_{10}$, $^7/_{10}$, $^6/_{10}$, $^5/_{10}$, $^4/_{10}$, $^3/_{10}$, $^2/_{10}$, $^1/_{10}$ derselben ausmachen.

Fig. 71.



Man lege (Fig. 71.) an die gegebene Gerade AB unter einem beliebigen Winkel eine gerade Linie an, und trage auf dieser, vom Scheitel des Winkels aus, 10 beliebig große aber gleiche Theile ab; ziehe durch den letzten Theilungspunkt C die Gerade BC und durch die übrigen 9 Theilungspunkte Parallelen zu AB, so sind diese Parallelen, durch BC begrenzt, die verlangten Linien.

Beweis. Es ist nach §. 62. Z. 3.

$$AC : 9C = AB : 9a$$
$$\text{und } AC : 9C = 10 : 9 \quad (\text{B. D. C.})$$
$$\text{folglich } AB : 9a = 10 : 9$$
$$\text{d. h. } 9a = {}^9/_{10}\,AB$$

Ebenso wird erwiesen, daß 8b $= {}^8/_{10}$AB; 7c $= {}^7/_{10}$AB; 6d $= {}^6/_{10}$AB.... und endlich 1k $= {}^1/_{10}$AB ist.

Zusatz. Sollten die verlangten Geraden $\frac{2}{3}$AB, $\frac{3}{4}$AB, $\frac{5}{6}$AB seyn, so verwandle man diese Brüche in gleichnamige, nämlich in $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{10}{12}$, theile AC in 12 gleiche Theile, und ziehe durch den 8ten, 9ten, 10ten Theilungspunkt Parallelen zu AB.

§. 74.

Aufgabe. Eine gegebene Gerade AB in 1000 gleiche Theile so zu theilen, daß die Länge jedes Tausendtheils derselben angegeben werden kann. (Fig. 72.)

Auflösung. Die gegebene Gerade AB theile in den Punkten a, b, c, d, ... k in 10 gleiche Theile und eben so den ersten dieser Theile, Aa, ebenfalls in 10 gleiche Theile (§. 63.); errichte in A eine Senkrechte, auf welcher man bis D 10 beliebig große aber gleiche Theile abträgt; durch alle Theilungspunkte auf AD ziehe Parallelen zu AB, welche durch die Senkrechten in a, b, c, d, ... k, B errichtet, geschnitten werden; endlich ziehe 9D und durch die Punkte 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 der Geraden Aa, Parallelen zu 9D, welche alle DM schneiden, so ist die verlangte Theilung geschehen.

Beweis. $Aa = Dm = \frac{1}{10} AB$ und $m1 = 12 = 23 .. = \frac{1}{10} Aa = \frac{1}{100} AB$. In dem Dreieck am1 stellen die Geraden, die mit AB parallel laufen, der Ordnung nach die Längen vor:

$\frac{1}{10}$ m1, $\frac{2}{10}$ m1, $\frac{3}{10}$ m1 ... $\frac{9}{10}$ m1, $\frac{10}{10}$ m1

oder

$\frac{1}{100}$ Aa, $\frac{2}{100}$ Aa, $\frac{3}{100}$ Aa .. $\frac{9}{100}$ Aa, $\frac{10}{100}$ Aa

oder

$\frac{1}{1000}$ AB, $\frac{2}{1000}$ AB, $\frac{3}{1000}$ AB .. $\frac{9}{1000}$ AB, $\frac{10}{1000}$ AB.

Man kann also in dem Dreieck am1 die Längen von $\frac{1}{1000}$ AB bis $\frac{10}{1000}$ AB angeben.

In dem Viereck am21 erhält man

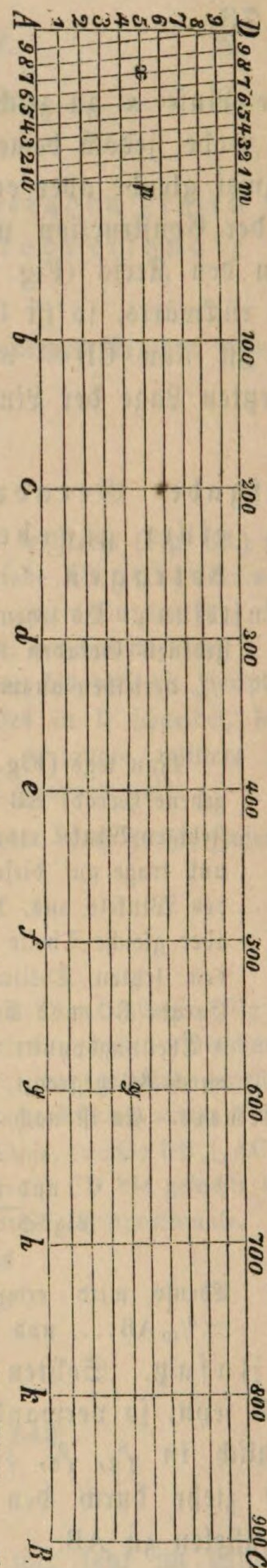


Fig. 72.

in derselben Ordnung durch die zu AB gezogenen Parallelen die Längen von

$^{11}/_{1000}$ AB, $^{12}/_{1000}$ AB ..... $^{19}/_{1000}$ AB, $^{20}/_{1000}$ AB,

und auf die nämliche Weise kann man in dem Viereck am32 nach einander $^{21}/_{1000}$ AB .... $^{30}/_{1000}$ AB abtragen.

Indem man so weiter fortfährt, ist man im Stande in dem Viereck amDA alle Theile der AB von $^{1}/_{1000}$ anfangend, bis $^{100}/_{1000}$ anzugeben. Addirt man nun zu jedem einzelnen dieser Theile die Gerade ab = Aa = $^{100}/_{1000}$ AB, so wird jetzt in dem Viereck Db die Länge jeder Geraden von $^{1}/_{1000}$ AB bis $^{200}/_{1000}$ AB abgetragen werden können und nimmt man noch die Längen ac = 2Aa = $^{200}/_{1000}$ AB; ad = $^{300}/_{1000}$ AB; ae = $^{400}/_{1000}$ AB .... zu Hülfe, so wird es einleuchtend seyn, daß man mittelst dieser Theilung jeden Tausendtheil von AB angeben und abtragen kann und auch im Stande ist, die Länge jeder geraden Linie zu messen, d. h. zu bestimmen, wie viele Theile auf AB die zu messende Gerade beträgt. Wäre die zu messende Gerade größer als AB, so müßte vorher erst untersucht werden, wie oft AB in dieser Geraden enthalten ist, der allenfallsige Rest wird sodann auf die eben angegebene Weise auf AB wieder gemessen.

Hätte man z. B. gefunden, daß eine Gerade = 3AB wäre und der Rest wäre = der Geraden xy, so wäre die Länge dieser Linie, weil xy = $^{675}/_{1000}$ AB ist (denn yp = ag = 6Aa = $^{600}/_{1000}$ AB und px = $^{75}/_{1000}$ AB), = 3AB + $^{675}/_{1000}$ AB = $^{3675}/_{1000}$ AB.

Zusatz. Die in der Auflösung beschriebene Figur (Fig. 72.) nennt man einen *geometrischen*, auch wohl *verjüngten Maßstab*; die Anwendung desselben ist in der geometrischen Zeichenkunst von großer Wichtigkeit, was wir zum Theil hier durch die Auflösung einer Aufgabe zeigen wollen.

Aufgabe. *Mittelst des geometrischen Maßstabes zwei Linien zu zeichnen, die sich verhalten, wie zwei gegebene Zahlen.*

Auflösung a) Es sey das gegebene Zahlenverhältniß = 120 : 145. Man nehme von dem geometrischen Maßstab einmal 120 Theile und trage diese auf einer unbestimmt lang gezogenen Geraden ab; ebenso nehme man 145 Theile und trage sie auf einer andern unbestimmt lang gezogenen Geraden ab; die so erhaltenen zwei Linien, werden sich demnach verhalten = 120 : 145.

Man hätte das Verhältniß 120:145 auch zuerst auf das gleiche Verhältniß 24:29 bringen und eben so verfahren können.

b) Wäre das gegebene Zahlenverhältniß ein Verhältniß aus Brüchen, etwa $= {}^{13}/_{21} : {}^{15}/_{7}$, so verwandle man zuerst dieses Verhältniß aus Brüchen bestehend, in ein gleiches, dessen Glieder ganze Zahlen sind, nämlich ${}^{13}/_{21} : {}^{15}/_{7} = 91 : 815 = 13 : 45$ und verfahre wie oben.

c) Wäre das gegebene Zahlenverhältniß irrational, etwa $= \sqrt{4} : \sqrt{28}$, so setze man $\sqrt{4} : \sqrt{28} = 1 : \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{4}} = 1 : \sqrt{\frac{28}{4}} = 1 : \sqrt{7} = 1 : 2,645751 = 1000 : 2645$ ohngefähr. Verfährt man nun, wie oben beschrieben worden, so erhält man zwei Linien, die beinahe das gegebene Verhältniß zu einander haben.

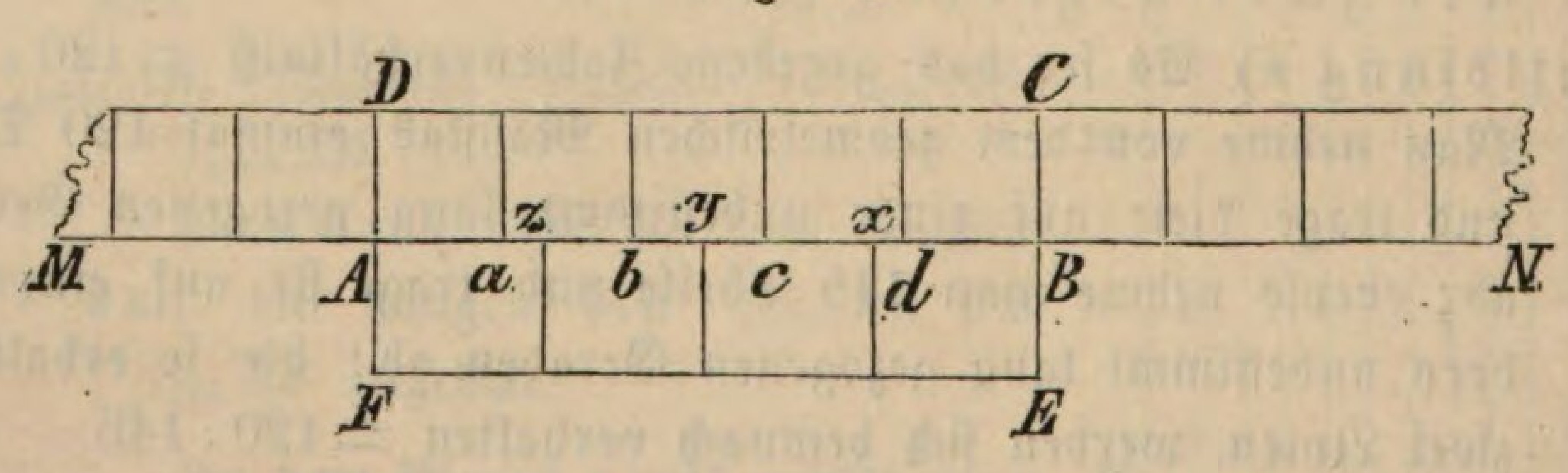
Wollte man in diesem Fall das Verhältniß genauer haben, so wäre ein Maßstab erforderlich, in welchem die Linie AB in mehr als 1000 Theile getheilt ist. Je größer die Anzahl der Theile in AB ist, desto mehr kann das Verhältniß der beiden zu suchenden Linien dem gegebenen irrationalen Zahlenverhältniß genähert werden; denn man könnte setzen 10000:26457 oder 100000:264575 u. s. w.

In der Ausübung jedoch hat die Vermehrung der Anzahl der Theile in AB seine Grenzen, weil die einzelnen Theile nicht so klein werden dürfen und können, daß man sie nicht mehr mit dem Auge unterscheiden und mit dem Zirkel fassen kann.

Anmerkung. Einer sehr einfachen und sinnreichen Vorrichtung muß hier noch Erwähnung geschehen, gegebene Längen in sehr kleine Theile zu theilen, welche an allen denjenigen Instrumenten mit Vortheil angebracht ist, bei denen es darauf ankommt, sehr kleine Theile einer Linie zu erkennen. Man nennt diese Vorrichtung Nonius, auch Vernier, nach ihren Erfindern, einem Spanier, Nunez, oder einem Deutschen, Werner, da Beiden die Erfindung zugeschrieben wird.

Das Wesentliche dieser Vorrichtung beruht auf Folgendem: Es sey ABCD (Fig. 73.) ein Theil eines Maßstabes, und AB

Fig. 73.



in den Punkten a, b, c, d in fünf gleiche Theile getheilt; eben so sey ABEF ein Maßstab, dessen Seite AB in den Punkten z, y, x in vier gleiche Theile getheilt ist. Legt man nun diese beiden Stäbe so neben einander, daß die Endpunkte der beiden gleichen Linien AB auf einander liegen, so ist

$$az = Az - Aa = \tfrac{1}{4}AB - \tfrac{1}{5}AB = \tfrac{1}{20}AB$$
$$by = Ay - Ab = \tfrac{2}{4}AB - \tfrac{2}{5}AB = \tfrac{2}{20}AB$$
$$cx = Ax - Ac = \tfrac{3}{4}AB - \tfrac{3}{5}AB = \tfrac{3}{20}AB$$
$$dB = AB - Ad = AB - \tfrac{4}{5}AB = \tfrac{4}{20}AB$$

Solchergestalt ist man im Stande jeden zwanzigsten Theil der Geraden AB angeben zu können.

Ist nun ABCD auf beiden Seiten verlängert und überall dieselbe Eintheilung beibehalten, ABEF aber beweglich und an der Geraden MN hin und her verschiebbar, so läßt sich an jedem Theil des Maßstabes die Vorrichtung ABEF (welche der Nonius, Vernier ist) hinbringen und die dortigen Fünftel können in Zwanzigstel getheilt werden.

Würde man die Gerade AB in 11, den Nonius aber in 10 gleiche Theile getheilt haben, und a, z wären die beiden ersten Theilungspunkte, so wäre $az = Az - Aa = \tfrac{1}{10}AB - \tfrac{1}{11}AB = \tfrac{1}{110}AB$. Auf diese Weise könnte der hundertundzehnte Theil von AB angegeben werden

Ueberhaupt wenn ein Theil des Maßstabes in $m+1$ gleiche Theile und der Nonius im m gleiche Theile getheilt ist, so kann man den $(m+1)$mten Theil vom Maßstab abnehmen.

Dieser Nonius läßt sich aber nicht allein bei geradlinigen Maßstäben anbringen, sondern man bedient sich desselben auch mit gleichem Vortheil bei der Eintheilung der Kreisbögen in Grade, Minuten und Secunden; der eigentliche Gebrauch desselben indessen läßt sich am leichtesten erklären, wenn man ein Instrument zur Hand nimmt, an welchem eine solche Vorrichtung angebracht ist.

§. 75.

Willkürlicher Satz. Zur Ausmessung gerader Linien bedient man sich einer gewissen Länge und nennt diese Fuß.

Der Fuß wird eingetheilt in 10 oder 12 gleiche Theile und man nennt einen solchen Theil: Zoll, und zwar im

ersten Falle Decimal-Zoll, im zweiten Falle Duodecimal-Zoll.

Der Decimal-Zoll theilt sich wieder in 10 gleiche Theile: Decimal-Linien; der Duodecimal-Zoll aber in 12 gleiche Theile: Duodecimal-Linien.

Eine Länge aber, die gleich 10 Fuß ist, nennen wir Ruthe.

Zusatz. Also ist

1 Fuß = 10 Zoll = 100 Linien, nach der Decimaleintheilung

1 Fuß = 12 Zoll = 144 Linien, nach der Duodecimaleintheilung.

Wäre (in Fig. 72.) die Linie AB = 1 Fuß, so könnte jetzt Aa = ab = bc... = 1 Decimalzoll und A9 oder 89 = 1 Decimallinie abgemessen werden. So wäre z. B. xy = 6 Zoll 7, 5 Linien, oder 67, 5 Linien.

Wollte man einen Maßstab haben, von welchem man Duodecimalzolle, Duodecimallinien abtragen könnte, so müßte AB = 1 Fuß in 12 gleiche Theile und jeder dieser Theile wieder in 12 gleiche Theile getheilt werden; behielte AD seine Eintheilung in 10 gleiche Theile, so könnten nun die Duodecimallinien in ihren Zehntheilen gefaßt werden.

Anmerkung 1. Eine Gerade, welche 4 Ruthen 9 Fuß 8 Zoll 6 Linien lang ist, wird also bezeichnet: $4^0\ 9'\ 8''\ 6'''$.

Anmerkung 2. Die Decimaleintheilung des Fußes und Zolles hat entschiedene Vorzüge vor der Duodecimaleintheilung dieser Längen und es wäre zu wünschen, daß erstere ausschließend eingeführt würde.

So kann bei der Decimaleintheilung die Verwandlung der Fuße in Zolle und Linien untereinander durch ein bloßes Verrücken des Kommas bewerkstelligt werden, wenn man sich dabei der Decimalbruchrechnung bedient, während diese Operation der Verwandlung bei der Duodecimaleintheilung immer mit mehr Arbeit und Zeitverlust verbunden ist.

Will man z. B. 25′ 9″ 3‴ Decimalmaß auf die Be-

nennung von Fuß oder Zoll oder Linien bringen, so hat man sogleich:

$$25'\,9''\,3''' = 25,93' = 259,3'' = 2593'''$$

während bei der Duodecimaleintheilung folgende Rechnungen nothwendig sind:

$$25'9''3''' = 25' + \tfrac{9}{12}' + \tfrac{3}{144}' = 25' + \tfrac{108}{144}' + \tfrac{3}{144}' = 25\tfrac{111}{144}$$

$$\text{oder } 25'9''3''' = 25.12'' + 9'' + \tfrac{3}{12}'' = 309\tfrac{3}{12}''$$

$$\text{und } 25'9''3''' = 25.144''' + 9.12''' + 3''' = 3600''' + 108''' + 3''' = 3711'''.$$

Noch weit beschwerlicher zeigt sich diese Rechnung, wenn nicht bloß mit Duodecimal-Längenmaß, sondern mit dessen Flächen-, oder gar Körpermaß operirt werden soll, wie sich in der Folge herausstellen wird.

Anmerkung 3. Weil 1 Fuß = 10 Decimalzoll = 12 Duodecimalzoll, so ist

12 : 10 = 1 Decimalzoll : 1 Duodecimalzoll; daher
1 Decimalzoll = $\tfrac{12}{10}$ Duodecimalzoll
1 Duodecimalzoll = $\tfrac{10}{12}$ Decimalzoll
daher auch a Decimalzoll = $\tfrac{12}{10}$ a Duodecimalzoll
a Duodecimalzoll = $\tfrac{10}{12}$ a Decimalzoll.

Anmerkung 4. Die wirkliche Länge eines Fußes ist aber in verschiedenen Ländern verschieden, und eben so die Anzahl Fuße, die auf eine Ruthe gerechnet wird; es ist daher nothwendig, sich sowohl von der Größe des üblichen Fußmaßes, als auch von der Anzahl Fuße, die auf die Ruthe gerechnet wird, in Kenntniß zu setzen, ehe eine Messung oder Berechnung mit diesen Längenmaßen unternommen wird.

Zur Vergleichung der üblichen Fußmaße in den verschiedenen Ländern hat man den französischen (Pariser Fuß) (Pied du Roi) als Normalmaß gewählt, diesen in 14400 gleiche Theile eingetheilt und sodann bestimmt, wie viel von diesen Theilen auf jeden einzelnen Landesfuß kommen.

So beträgt der Bayerische	Fuß	12938	solcher	Theile
Nürnberger	»	13467	»	»
Ausgsburger	»	13129	»	»
Ansbacher	»	12570	»	»
Rheinländer	»	13913	»	»
Preußische	»	13913	»	»
Würtemberger	»	12780	»	»
Frankfurter	»	12700	»	»
Leipziger	»	12520	»	»
Londoner	»	13511	»	»
Wiener	»	14013	»	»

So gehen auf die Bayerische Ruthe 10 Fuß
Nürnberger Ruthe 16 Fuß
die kleine Ruthe 12 Fuß
Preußische Ruthe 12 Fuß lang (wird in 10 gleiche Theile getheilt)
Würtemberger Ruthe 10 Fuß
Frankfurter Ruthe $12^1/_2$ Fuß (wird in 10 gleiche Theile getheilt)
Leipziger Landruthe 8 Werkfuß
außerdem noch zu 12 und $15^1/_6$ Fuß
Wiener Ingenieurruthe 10 Fuß.

In den neueren Zeiten wurde in Frankreich ein, von dem früher üblichen, verschiedenes Maß eingeführt, von welchem die neue Maßeinheit den Namen Mètre erhielt. Es ist aber

1 Mètre = 3,07844 Pariser Fuß = 3 Fuß 11,296 Pariser Linien.

Ferner ist 1 Mètre = 3,42631 Bayerische Fuß
= 3,18620 Preußische Fuß.

Anmerkung 5. Kennt man nun die Verhältnißzahlen (vorige Anmerkung) der landesüblichen Fußmaße, so ist es leicht, das eine in das andere zu verwandeln, so ist z. B.

12938 : 13913 = 1' Bayerisch : 1' Preußisch, daher
1' Bayerisch = $^{12938}/_{13913}$' Preußisch = 0,92993 ... Pr. Fuß
1' Preußisch = $^{13913}/_{12938}$' Bayerisch = 1,0753 Bayr. Fuß

Daher sind

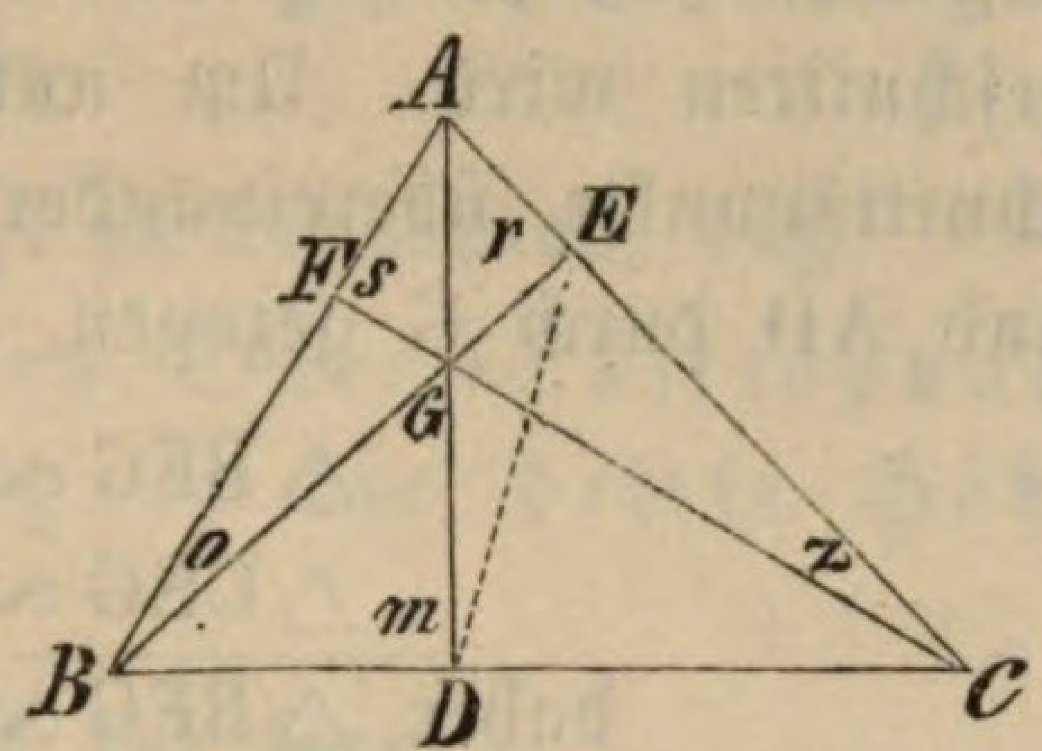
a Bayer. Fuß = $^{12938}/_{13913}$ a Preuß. Fuß = 0,92993 ... a Preuß. Fuß
und
a Preuß. Fuß = $^{13913}/_{12938}$ a Bayer. Fuß = 1,0753 ... a Bayr. Fuß.

§. 76.

Ehe wir diesen Abschnitt beschließen, wollen wir noch an der Entwickelung einiger wichtiger, die Eigenschaften der Dreiecke betreffender Sätze zeigen, wie man durch die Verbindung der bisher erwiesenen Sätze entlegenere Eigenschaften der Figuren auffinden kann.

1) Wir wollen zu diesem Behufe den 3ten Zusatz des §. 57. näher betrachten und zeigen, wie sich diese Höhen und ihre Durchschnittspunkte in jedem andern Dreiecke verhalten.

Fig. 74.



Es sey (Fig. 74.) ABC irgend ein Dreieck, AD die Höhe auf BC und BE die Höhe auf AC, folglich AD ⊥ BC und BE ⊥ AC. Wir bemerken daher sogleich zwei rechtwinkelige Dreiecke, ADC, BEC, und da beide den Winkel C gemeinschaftlich haben, so folgt daß

$$\triangle ADC \sim \triangle BEC.$$

Wollen wir nun erforschen, wie die Höhen zu ihren Seiten sich verhalten, so wird

$$AD : AC = BE : BC, \text{ oder}$$
$$AD : BE = AC : BC, \text{ d. h.}$$

I. In jedem Dreieck stehen die Seiten im umgekehrten Verhältniß mit ihren Höhen.

Würden wir das Verhältniß des Abschnittes DC zur Höhe AD, oder zur Seite AC zu suchen haben, so ergibt sich wieder aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ADC, BEC

$$AD : DC = BE : CE, \text{ oder}$$
$$\alpha) \quad AD : BE = DC : CE.$$

Weil ferner $DC : AC = CE : BC$, oder

$$\beta) \quad DC : CE = AC : BC$$

Nämlich aus α fließt folgender Satz:

II. Zwei aneinandergrenzende, durch ihre Höhen erzeugte, Abschnitte verhalten sich wie ihre erzeugenden Höhen,

und aus β.:

III. diese Abschnitte verhalten sich umgekehrt wie die Seiten, auf welchen sie liegen.

Ziehen wir nun zu der Höhe AD die dritte Höhe FC, so ist wieder $\triangle ABC \sim \triangle BFC$ und es ergeben sich auch für diese beiden Höhen dieselben Resultate und wir sehen

zugleich, daß jede Höhe von einer andern in einem Punkt geschnitten wird. Um nun zu erfahren, ob diese Durchschnittspunkte übereinanderfallen, sey BE ⊥ AC, CF ⊥ AB und AD durch G gezogen, so bemerken wir zuerst, daß

$\triangle BFG \sim \triangle CEG$ und
$\triangle CEG \sim \triangle CFA$

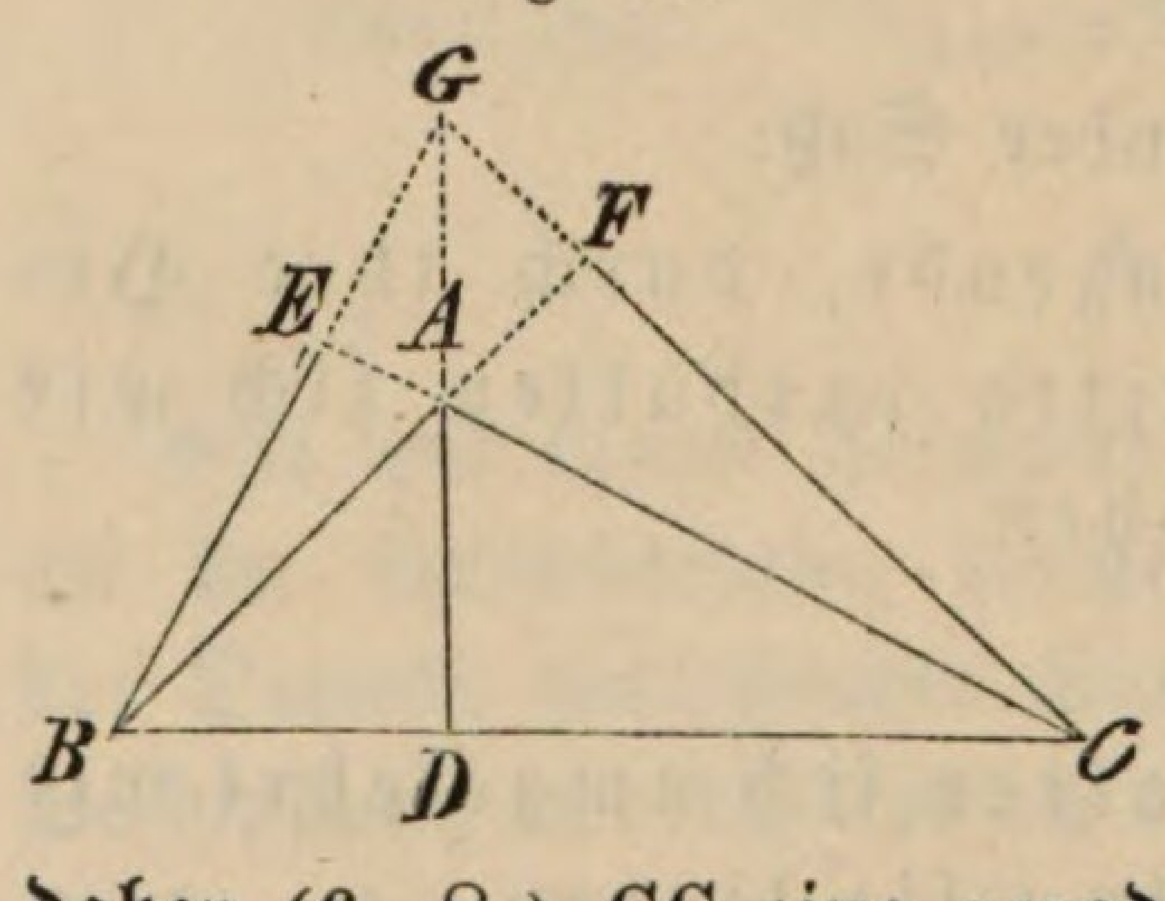
daher $\triangle BFG \sim \triangle CFA$, daraus
$BF : FG = FC : AF$, oder
$BF : FC = FG : AF$

folglich $\triangle BFC \sim \triangle FAG$ (§. 67.)
deßhalb $\angle FCB = \angle FAG$.
Nun ist $\angle FCB = R - \angle ABC$,
daher auch $\angle FAG = R - \angle ABC$;

d. h. die Gerade AD durch den Durchschnittspunkt G der beiden Höhen AD und BE gezogen, steht senkrecht auf BC und ist mithin die dritte Höhe des Dreiecks.

Diese Untersuchung wurde an einem spitzwinkeligen Dreiecke, in welchem die drei Höhen innerhalb des Dreiecks liegen, vorgenommen, es bliebe nun noch übrig zu zeigen, ob im stumpfwinkeligen Dreieck, bei welchem zwei Höhen außerhalb des Dreiecks fallen, die Durchschnittspunkte ebenfalls zusammentreffen.

Fig. 75.



Zu dem Ende sey (Fig. 75.) das Dreieck ABC bei A stumpf; zieht man BE ⊥ AC, AD ⊥ BC, so geben die beiden verlängerten Höhen den Durchschnittspunkt G; fällt man nun CF ⊥ AB, und zieht FG, so läßt sich eben so erweisen, daß $\angle GFB = R$, daher (§. 8.) GC eine gerade Linie ist.

IV. Mithin durchschneiden sich in jedem Dreieck die drei Höhen in einem und demselben Punkt und der im §. 57. Z. 3. ausgesprochene besondere Satz für

das gleichseitige Dreieck hat nunmehr allgemeine Gültigkeit und erstreckt sich auf alle Dreiecke.

Wir sind nun auch ermächtigt zu behaupten, daß

V. die Gerade FC durch den Durchschnittspunkt G zweier Höhen gezogen, die dritte Höhe des Dreiecks ist

und eben so ergibt sich von selbst der Satz:

VI. Im stumpfwinkeligen Dreieck liegt der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Höhen außerhalb, im spitzwinkeligen innerhalb der Fläche des Dreiecks und im rechtwinkeligen in der Spitze des rechten Winkels.

In den beiden Dreiecken GDC und GEC (Fig. 74.) erblicken wir bei D und E rechte Winkel, folglich schließen wir

VII. der Winkel, den zwei Höhen einschließen, ergänzt den gegenüberliegenden Dreiecks-Winkel zu zwei Rechten.

Aus Satz III. erhält man, wenn man ihn dreimal anwendet, nämlich

$$AB : AC = AE : AF$$
$$BC : AB = BF : BD$$
$$AC : BC = CD : CE$$

und diese drei Proportionen zu einer verbindet:

$$AB \,.\, BC \,.\, AC : AC \,.\, AB \,.\, BC = AE \,.\, BF \,.\, CD : AF \,.\, BD \,.\, CE$$

oder $AE \,.\, BF \,.\, CD = AF \,.\, BD \,.\, CE$ d. h.

VIII. die Produkte der überspringenden Abschnitte sind einander gleich.

2) Fassen wir die Dreiecke ins Auge, die innerhalb des Dreiecks ABC (Fig. 74.) durch die gezogenen drei Höhen entstehen, so bemerken wir, daß alle rechtwinkelig, und bei der, allen gemeinschaftlichen, Spitze G Scheitelwinkel sind; wir erblicken daher sogleich immer einander gegenüberlie-

gende ähnliche Dreiecke. Betrachten wir zwei solcher ähnlicher Dreiecke genauer, z. B. $\triangle BGD$ und $\triangle EGA$ und untersuchen wir, wie sich die Abschnitte der Höhen verhalten, so finden wir

$$BG : GD = AG : GE,$$ nämlich

IX. die, durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt zweier Höhen erzeugten Abschnitte sind sich umgekehrt proportionirt.

Wollen wir nun in der Fläche des Dreiecks ABC einen Punkt G von der Beschaffenheit uns denken, daß die drei Geraden, die durch ihn, von den drei Spitzen des Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten gezogen sind, immer so getheilt werden, daß ihre Abschnitte umgekehrt proportionirt sind, nämlich wollen wir uns denken, daß

1) $BG : GD = AG : GE$
2) $CG : GE = BG : FG$
3) $AG : FG = GC : GD$

Statt findet, so haben wir auch zugleich, weil bei G immer gleiche Scheitelwinkel sich gegenüberliegen, mit Zuziehung des §. 67., einander gegenüberliegende ähnliche Dreiecke, nämlich es ist 1) $\triangle BGD \sim \triangle AGE$ und daraus $m = r$
auch ist 2) $\triangle CGE \sim \triangle BGF$ und daraus $z = o$
und 3) $\triangle AGF \sim \triangle GCD$ und daraus $s = p$

Weil nun $z = o$ und $A = A$, so ist $\triangle AFC \sim \triangle AEB$, daher auch $r = s$.

Vergleichen wir nun die Winkel mit einander, welche diese drei Geraden mit den Seiten des Dreiecks bilden, so haben wir

$$m + p = 2R;$$

daher auch $r + s = 2R$

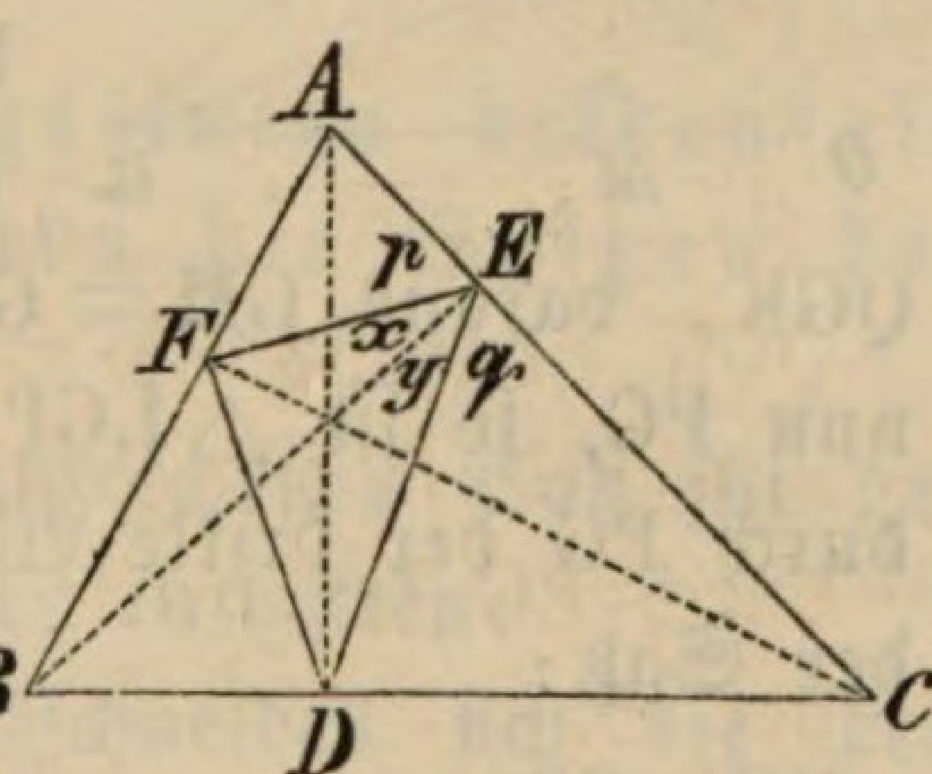
also $r = s = R$, also auch $p = R$, oder die drei gezogenen Geraden BE, CF, AD sind die drei Höhen des Dreiecks ABC.

X. Werden daher gerade Linien von den Winkelspitzen eines Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten durch einen gemeinschaftlichen Punkt gezogen, und diese Geraden werden so getheilt, daß ihre Abschnitte sich umgekehrt proportionirt sind, so sind diese Geraden die Höhen des Dreiecks.

Nun wird es auch nicht schwer seyn zu erweisen,

XI. daß, wenn diese Geraden im umgekehrten Verhältniß mit ihren zugehörigen Seiten oder im geraden Verhältniß mit zwei aneinander grenzenden, von ihnen erzeugten Abschnitten stehen, sie ebenfalls die Höhen sind.

Fig. 76.



3) Wir wollen nun das Dreieck DEF (Fig. 76.), welches entsteht, wenn man die Fußpunkte der drei Höhen durch gerade Linien verbindet, etwas näher untersuchen.

Wir bemerken zuerst, daß dieses Dreieck in dem ursprünglichen Dreieck ABC drei andere Dreiecke BFD, AFE, ECD mit bilden hilft. In jedem dieser Dreiecke bestehen immer zwei aneinander stoßende Seiten aus zwei von den Höhen erzeugten Abschnitten, und weil

$$BF : BD = AB : BC \quad \text{(II.)}$$

Statt findet, auch $\angle B = \angle B$ ist, so folgt jetzt $\triangle BFD \sim \triangle BCA$. Dasselbe ergibt sich bei den andern zwei Dreiecken, es sind daher

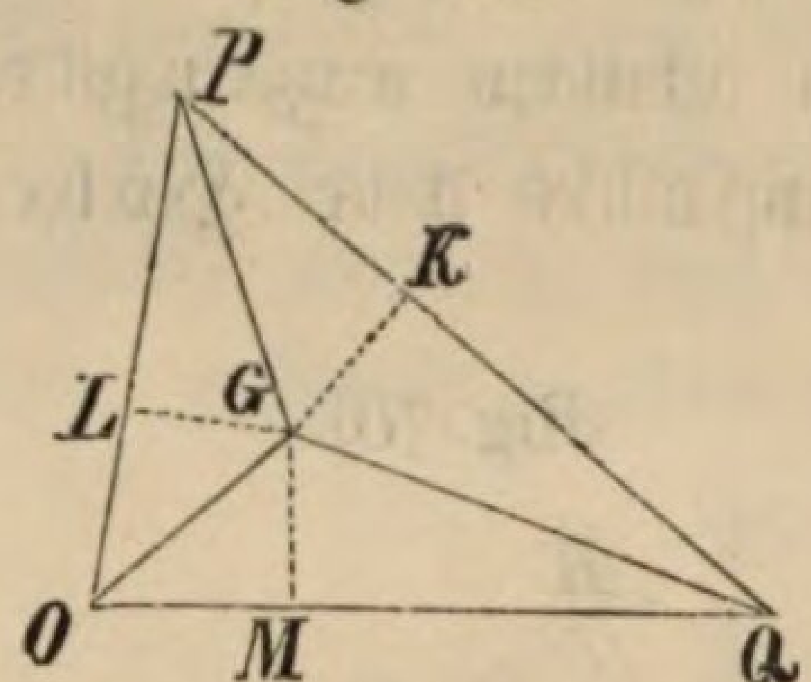
XII. diese drei Dreiecke dem ursprünglichen und also auch unter sich ähnlich.

Daraus finden wir sogleich, daß $p = q$, und weil $x + p = y + q = R$, so haben wir $x = y$ und daher:

XIII. In dem Dreieck FED, dessen Seiten die drei Fußpunkte der drei Höhen verbinden, werden die Winkel durch diese Höhen halbirt.

Wir nehmen wahr, daß die Winkel des Dreiecks DEF durch die drei Höhen des Dreiecks ADC halbirt werden, und daß diese winkelhalbirenden Linien sich in einem Punkt durchschneiden, und wollen auch sogleich untersuchen, ob dieses nur eine Eigenschaft dieses besondern Dreiecks DEF ist, oder ob sie in jedem Dreieck sich vorfindet.

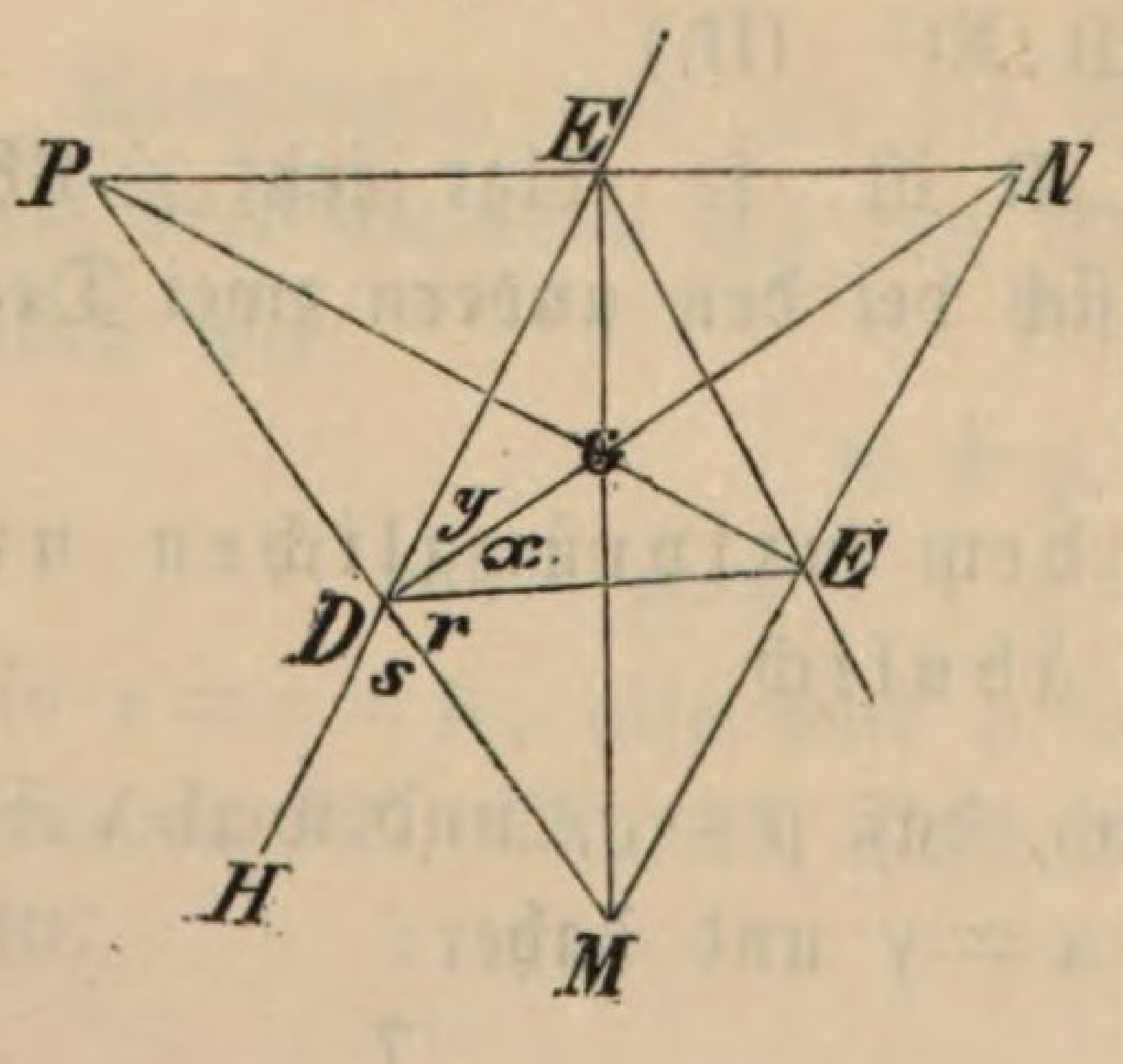
Fig. 77.



Es sey OPQ (Fig. 77.) irgend ein Dreieck, OG und GQ halbiren die Winkel O, Q; fällt man von dem gemeinschaftlichen Durchschnitt G dieser halbirenden Linien Senkrechte auf die drei Seiten, so ist $\triangle$ OGM $\cong$ $\triangle$ OGL; daraus GM = GL, und $\triangle$ QGM $\cong$ $\triangle$ QGK, daraus GM = GK, also auch GL = GK; zieht man nun PG, so ist $\triangle$ LGP $\cong$ KGP, und $\angle$ LPG = $\angle$ KPG, also durch PG der dritte Winkel halbirt, daher gilt auch folgender Satz:

XIV. Wenn man in einem Dreieck durch drei Gerade die drei innern Winkel halbirt, so durchschneiden sich diese in einem und demselben Punkt.

Fig. 78.



4) Wollen wir die Seite DE des Dreiecks DEF (Fig. 78.) nach H verlängern und den dadurch entstandenen Außenwinkel durch MP und den innern Winkel D durch DN halbiren, so haben wir r = s und x = y, und weil r + s + x + y = 2R, so ist r + x = R, d. h.

XV. **In jedem Dreieck stehen die beiden Geraden, welche einen innern und den anliegenden äußern Winkel halbiren, senkrecht auf einander.**

Halbirt man in einem Dreieck DEF die drei innern Winkel und ebenso die drei äußern Winkel durch gerade Linien und verlängert diese gehörig, so ergibt sich,

XVI. **daß immer zwei Gerade, die äußern Winkel halbiren, mit einer Geraden, die einen innern Winkel halbirt, sich in einem Punkt durchschneiden (M, N, P);**

XVII. **daß immer vier Durchschnittspunkte (M, N, P, G) entstehen, gebildet durch drei Halbirungslinien, und je zwei dieser Punkte liegen mit einer Halbirungsspitze in gerader Linie.**

XVIII. **Die äußern Halbirungslinien bilden ein Dreieck, in dessen Seiten die Spitzen des ersten Dreiecks liegen.**

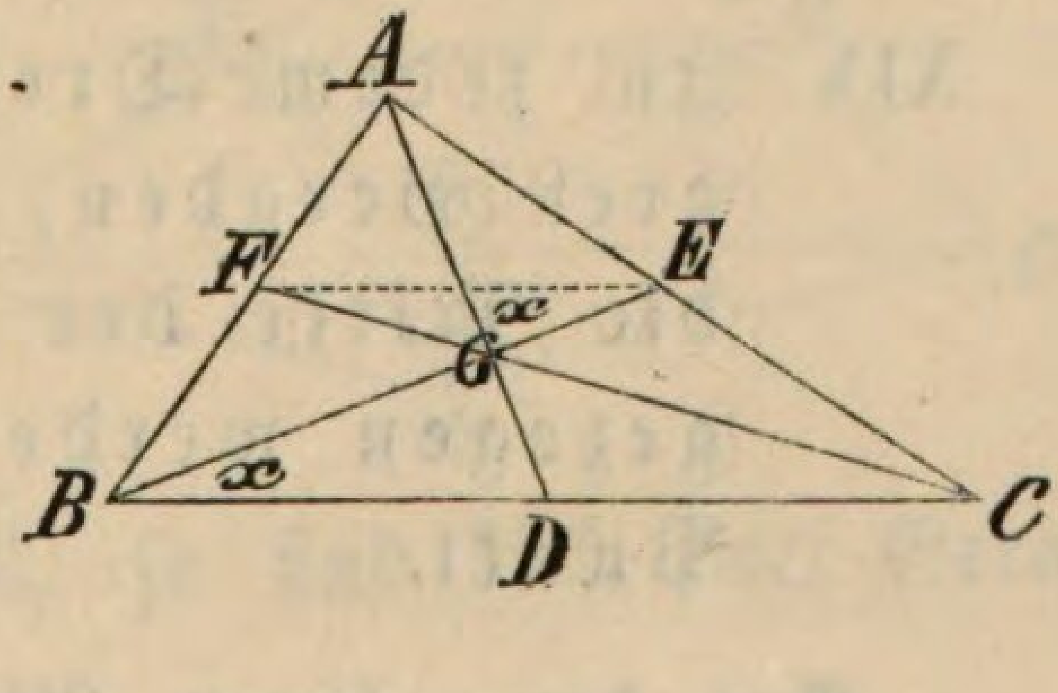
5) In dem §. 57. Z. 3. ausgesprochenen Satz für das gleichseitige Dreieck ist auch folgender enthalten:

Im gleichseitigen Dreieck durchschneiden sich die drei Geraden, welche von den Spitzen des Dreiecks in die Mitte der gegenüberliegenden Seiten gezogen werden, in einem Punkt, weil die Senkrechten aus den Spitzen zugleich auch die gegenüberliegenden Seiten halbiren.

Wir wollen nun untersuchen, ob dieser Satz allgemein für alle Dreiecke, oder nur speziell für das gleichseitige, gilt

Zu dem Ende sey (Fig. 79.) im Dreieck ABC die Seite AB in F, AC in E halbirt und aus diesen Halbirungspunkten die Geraden FC, EB nach den gegenüberliegenden Spitzen des Dreiecks gezogen.

Fig. 79.



Wir bemerken sogleich, daß vermöge der Halbirung der Seiten AB und AC folgende Proportion Statt finden muß:

$$AF : AB = AE : AC$$

und weil $\angle A$ gemeinschaftlich, ist, wenn man FE zieht, $\triangle AFE \sim \triangle ABC$ (§ 67.) und daher $FE \parallel BC$, daraus ergibt sich ferner

$$AF : AB = FE : BC \text{ und}$$
$$\text{weil } AF : AB = 1 : 2$$
$$\text{so folgt } FE : BC = 1 : 2 \text{ d. h.}$$
$$FE = \tfrac{1}{2} BC.$$

Ueberlegt man ferner, daß $FE \parallel BC$, also $x = x$, und daß bei G Scheitelwinkel liegen, so ist klar, daß $\triangle FEG \sim \triangle BCG$; daher

$$BC : FE = BG : GE$$
$$= GC : FG$$
$$2 : 1 = BG : GE = GC : FG, \text{ d. h.}$$
$$GE = \tfrac{1}{2} BG;\ FG = \tfrac{1}{2} GC.$$

Betrachtet man nun die, die Seiten halbirenden Geraden BE, CF genauer, so sieht man, daß beide im gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt G nach demselben Verhältniß geschnitten sind, daß also der Punkt G für beide ein bestimmter ist und weil BE oder CF die aus A gezogene halbirende Gerade AD sowohl, als sich auch in dem nämlichen Verhältniß theilen wird, so folgt, daß AD ebenfalls durch den Punkt G gehen muß; also haben diese drei Geraden einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, und wir erhalten folgenden allgemeinen Satz:

XIX. In jedem Dreieck durchschneiden sich die drei Geraden, welche von den Spitzen in die Mitte der gegenüberliegenden Seiten gezogen werden, in einem und demselben Punkt.

Aus den obigen Gleichungen $GE = \tfrac{1}{2} BG$, $FG = \tfrac{1}{2} GC$

folgt, daß BE = 3GE und CF = 3FG, oder GE = $\frac{1}{3}$BE und FG = $\frac{1}{3}$CF, d. h.

XX. Jede Halbirungslinie theilt die andere so, daß das zwischen der Seite und dem Durchschnittspunkt liegende Stück der dritte Theil der ganzen Linie ist.

Hätten wir ein Dreieck ABC vor uns (Fig. 79.), von welchem bekannt wäre, daß zwei von den Spitzen des Dreiecks ausgehende gerade Linien sich so durchschneiden, daß der eine Abschnitt noch ein Mal so groß als der andere ist, und wir wollten erforschen, in welcher Beziehung diese Geraden zu den Seiten des Dreiecks sind, so setzen wir die Bedingungen EG = $\frac{1}{2}$BG und FG = $\frac{1}{2}$GC in folgende Proportion:

$$EG : FG = BG : GC,$$

und bemerken, daß, weil $\angle$ BGC = $\angle$ EGF ist, auch $\triangle$ BCG $\sim$ $\triangle$ FEG, daher gilt auch

$$BC : FE = BG : GE,$$

Nun ist BG : GE = 2 : 1 (V. D. B.)

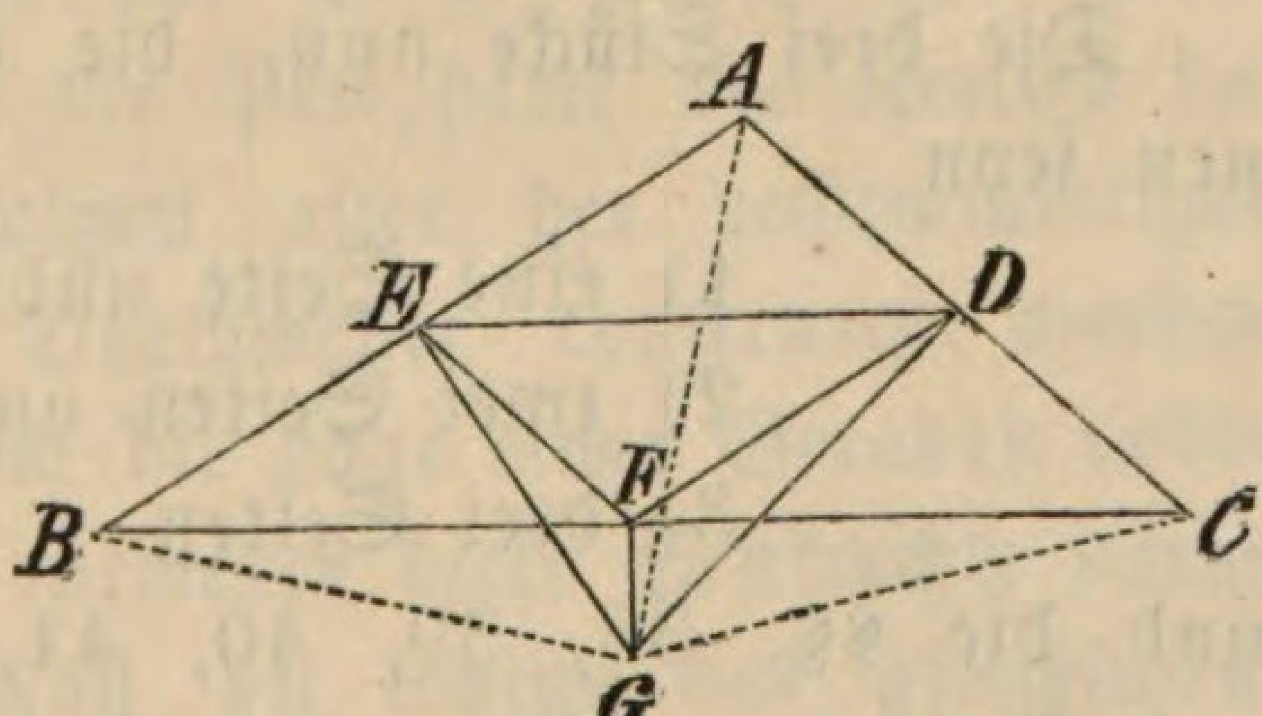
daher BC : FE = 2 : 1

Auch ist, weil EF || BC,

$$AB : AF = BC : FE$$
$$= 2 : 1$$

d. h. AB in F halbirt, und mithin stehen diese Geraden, die sich unter den oben angegebenen Bedingungen schneiden, in den Mitten der Seiten.

Fig. 80.



6) Halbirt man endlich im Dreieck ABC (Fig. 80.) die Seite AB in E und AC in D, und zieht EG ⊥ AB und GD ⊥ AC, so schneiden sich diese Senkrechten im Punkte G (§. 16. Z. 6.) Zieht man AG, BG, CG, so sind diese drei Gera-

den einander gleich (§. 38.); daher, wenn man in F, der Mitte von BC, eine Senkrechte errichtet, so geht diese ebenfalls durch den Punkt G (§. 57.); daher

XXI. die drei Senkrechten, welche die Seiten eines Dreiecks halbiren, durchschneiden sich in einem Punkt.

Verbindet man die drei Halbirungspunkte E, D, F der Seiten durch gerade Linien, so entstehen vier Dreiecke, welche alle unter einander sowohl, als auch dem ursprünglichen ähnlich sind.

§. 77.

Ein Dreieck ist vollkommen bestimmt, wenn man von den sechs Bestimmungsstücken, nämlich von den drei Seiten und drei Winkeln drei, worunter aber nothwendig eine Seite ist, kennt. Es ist leicht zu zeigen, daß aus zwei gegebenen Stücken das Dreieck nicht vollkommen bestimmt seyn kann, oder daß die Aufgabe aus zwei Bestimmungsstücken ein Dreieck zu zeichnen, eine unbestimmte ist, nämlich deswegen unbestimmt, weil sich unendlich viele Dreiecke zeichnen lassen, die diese zwei gegebenen Stücke enthalten, und eben so ist sogleich einzusehen, daß unter den bestimmenden Stücken nothwendig eine Seite seyn muß, wenn man sich zweier ähnlicher Dreiecke erinnert: diese stimmen hinsichtlich der Winkel immer überein, können aber an Größe von einander unendlich verschieden seyn.

Die drei Stücke nun, die ein Dreieck bestimmen, können seyn

1) eine Seite und zwei Winkel
2) zwei Seiten und ein Winkel
3) drei Seiten

und die §§. 38, 39, 40, 41, 42 aufgestellten Lehrsätze und Aufgaben zeigen, in wie fern diese drei Stücke das Dreieck bestimmen.

Aber als Bestimmungsstücke können auch gelten: die Summen und Differenzen sowohl der Seiten als der Winkel, die Höhen, Abschnitte der Seiten, die Winkel, die die Höhen mit den Seiten und unter einander einschließen, so wie Summen und Differenzen der Höhen und Seiten als auch die der Winkel ꝛc. und dadurch erhält man eine Reihe von Sätzen, die entweder als Lehrsätze oder als Aufgaben behandelt werden können.

Wir werden hier eine Reihe von diesen Sätzen als Aufgaben folgen lassen.

Die Construction einer Aufgabe im Allgemeinen erzielt man, wenn man genau sich der Eigenschaften der zu construirenden Figur erinnert und genau untersucht, in welcher Beziehung die gegebeneu Stücke zu den verlangten stehen. Hauptsächlich handelt es sich darum, für die unbekannten Endpunkte der Figur sich Durchschnitte (entweder zweier gerader Linien, oder einer Geraden und eines Kreisbogens, oder zweier Kreisbogen) zu verschaffen. Diese Durchschnittspunkte erhält man aber, wenn man aus den Eigenschaften der zu suchenden Figur zwei solche Linien aufsucht und ihre Lage gegenseitig bestimmt, welche die Eigenschaft haben, daß der gesuchte Punkt in ihnen liegen muß. Jede dieser Linien heißt der geometrische Ort dieses Punktes und ihr Durchschnittspunkt ist der gesuchte Punkt. So ist z. B. die Senkrechte, in der Mitte einer Linie errichtet, der geometrische Ort für die Spitzen aller derjenigen gleichschenkeligen Dreiecke, welche auf dieser Linie als einer Grundlinie möglich sind; so die Peripherie des Kreises der geometrische Ort für die Spitzen aller der rechtwinkeligen Dreiecke, welche auf dem Durchmesser construirt werden können; kennt man nun noch die Lage einer Geraden (oder eines Kreisbogens), welche entweder diese Senkrechte durchschneidet, so ist im ersten Fall die Spitze des gleichschenkeligen Dreiecks, oder welche die Peripherie des Kreises

schneidet, so ist im zweiten Fall die Spitze des rechten Winkels bekannt.

Von den geometrischen Oertern, die häufig bei der Construction geradliniger Figuren vorkommen, mögen außer den zwei schon erwähnten noch folgende besonders wichtige hier eine Stelle finden.

Die Peripherie eines Kreises ist der geometrische Ort eines Punktes, der von einem gegebenen eine gegebene Entfernung hat.

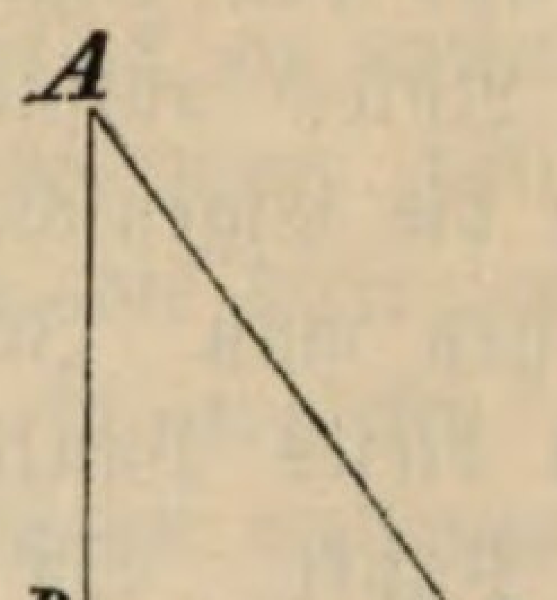
Die zu einer Geraden beiderseits in gleichen Abständen gezogenen Parallelen sind der geometrische Ort eines Punktes, der von dieser Geraden jenen Abstand hat.

§. 78.

Aufgabe. Ein rechtwinkeliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben ist:

1) die beiden Katheten.

Fig. 81.



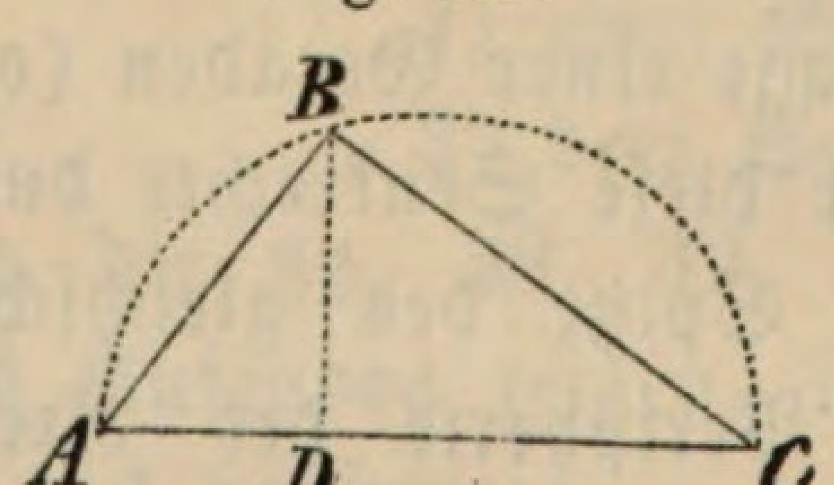
Auflösung. Man setze (Fig. 81.) die beiden Katheten rechtwinkelig zusammen und ziehe die Hypotenuse.

2) die Hypotenuse und eine Kathete.

Auflösung 1. Man construire einen rechten Winkel ABC (Fig. 81.), trage auf dem einen Schenkel BC = der gegebenen Kathete ab, und durchschneide von C aus mit einem Halbmesser AC = der gegebenen Hypotenuse, den andern Schenkel AB in A, ziehe AC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Das Dreieck ist rechtwinkelig und hat die Kathete BC und die gegebene Hypotenuse AC.

Fig. 82.



Auflösung 2. Beschreibe über der gegebenen Hypotenuse AC einen Halbkreis (Fig. 82.), trage die gegebene Kathete CB als Sehne ein und ziehe AB, so ist △ABC das verlangte.

Beweis. Vergl. §. 60, 1.

3) eine Kathete und der spitze Winkel.

Auflösung. An die gegebene Kathete BC (Fig. 81.) trage man im Punkt C den gegebenen spitzen Winkel C, dessen Schenkel AC durch die im Punkte B errichtete Senkrechte im Punkte A durchschnitten wird. Das Dreieck ABC ist das verlangte.

Wenn die Kathete BC und der gegenüberliegende Winkel A gegeben ist, wie wäre alsdann das Dreieck zu construiren?

4) die Hypotenuse und ein spitzer Winkel.

Auflösung. In Fig. 82. mache man $\angle$ ACB = dem gegebenen Winkel C, und beschreibe über AC, als der gegebenen Hypotenuse, den Halbkreis u. s. w.

Wie wäre das Dreieck zu construiren, ohne den Halbkreis zu Hülfe zu nehmen?

5) eine Kathete und die Differenz der beiden spitzen Winkel.

Auflösung. Es sey d die gegebene Differenz, so ist $\frac{R+d}{2}$ = dem größeren der beiden spitzen Winkel.

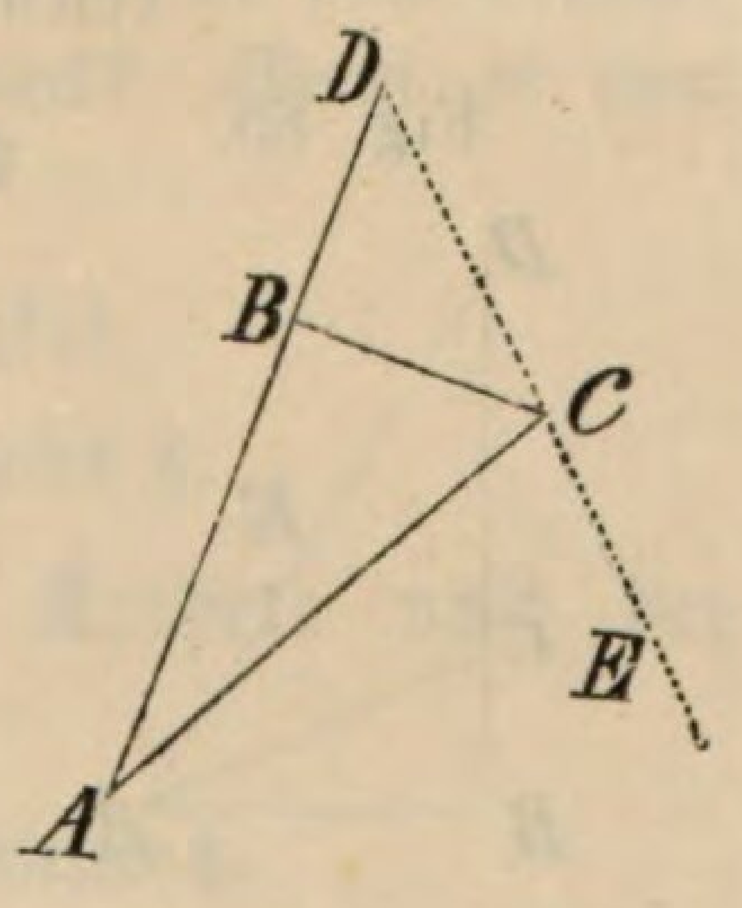
Warum? Wie wird nun jeder der beiden spitzen Winkel einzeln gefunden und das verlangte Dreieck construirt?

6) die Hypotenuse und die Differenz der beiden spitzen Winkel.

Auflösung. Ganz ähnlich der vorigen.

7) die Summe der beiden Katheten und die Hypotenuse.

Fig. 83.



Auflösung. An dem einen Endpunkt D der gegebenen Summe AD der beiden Katheten (Fig. 83.), construire man den Winkel ADE = $^1/_2$R und durchschneide von A aus mit einem Halbmesser AC = der gegebenen Hypotenuse den Schenkel DE in C, fälle CB senkrecht auf AD, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Weil CB ⊥ AD ist ∠CBA = R, mithin △ABC rechtwinkelig und auch △CBD bei B rechtwinkelig; weil ∠BDC = $\frac{1}{2}$R (V. D. C.), so ist auch ∠DCB = $\frac{1}{2}$R (§. 35, 2.); also DB = BC und daher AB + BC = AB + BD = AD; endlich hat das Dreieck noch die verlangte Hypotenuse AC.

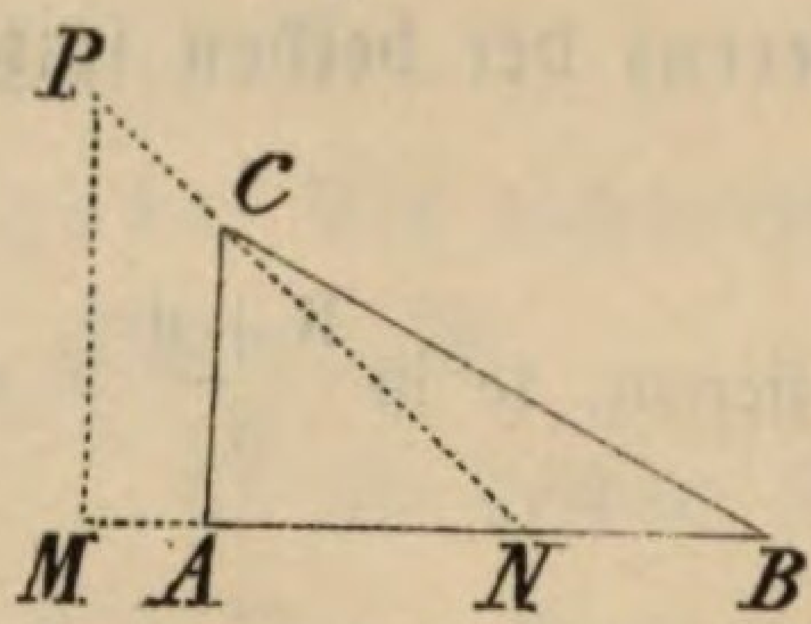
Wann wird die Construction aus den gegebenen Stücken unmöglich? Gibt es immer nur ein und dasselbe Dreieck oder mehrere von einander verschiedene und wie viele?

8) die Summe der beiden Katheten und ein spitzer Winkel.

Auflösung der vorigen ähnlich.

9) die Differenz der beiden Katheten und die Hypotenuse.

Fig. 84.



Auflösung. Man construire ein gleichschenkeliges und rechtwinkeliges Dreieck MPN (Fig. 84.), verlängere MN, so daß NB die gegebene Differenz der beiden Katheten ist; durchschneide von B mit einem Halbmesser BC = der gegebenen Hypotenuse NP in C, ziehe AC || MP, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. △ANC ist ebenfalls gleichschenkelig, also AN = AC, daher AB − AC = NB.

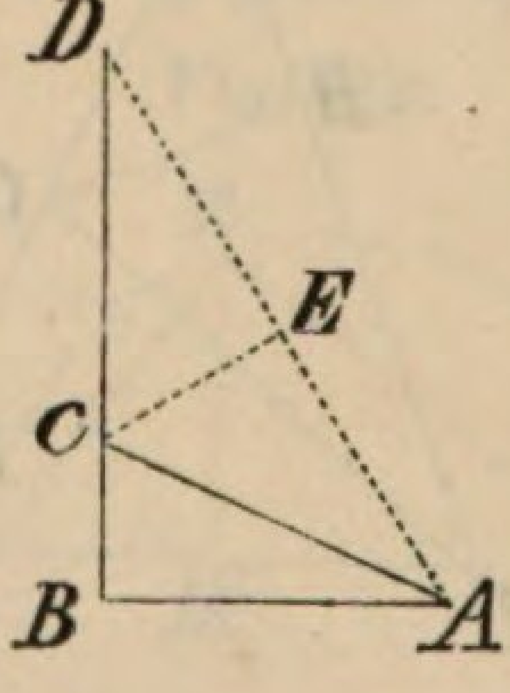
Wie wäre zu verfahren, wenn BC die PN nicht zwischen P und N, sondern in ihrer Verlängerung schnitte?

10) die Differenz der beiden Katheten und ein spitzer Winkel.

Auflösung der vorigen ähnlich.

11) die eine Kathete und die Summe der Hypotenuse und der andern Kathete.

Fig. 85.



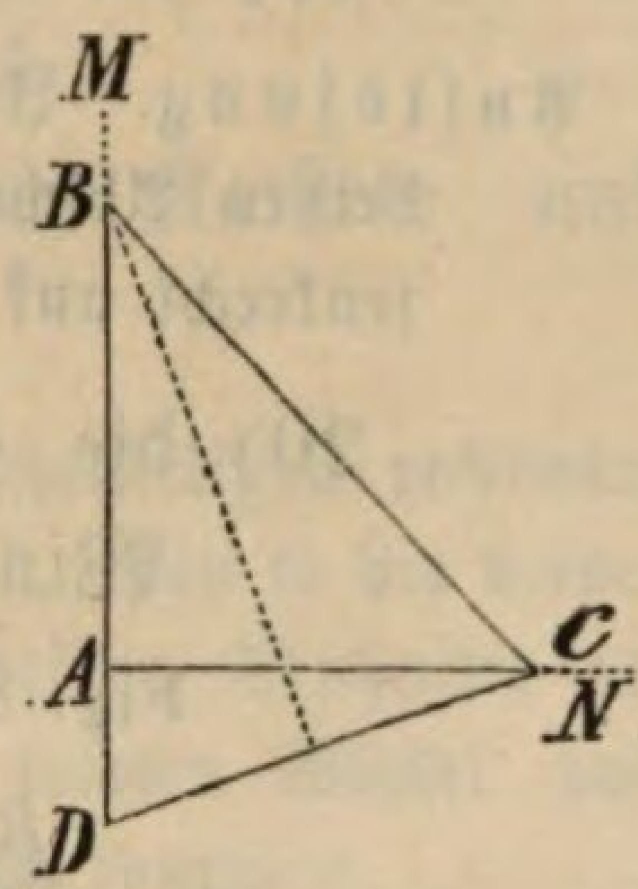
Auflösung. An (Fig. 85.) AB = der gegebenen Kathete lege man BD = der gegebenen Summe der Hypotenuse und der andern Kathete rechtwinkelig an; ziehe AD, halbire AD in E, errichte in E eine Senkrechte, welche DB in C schneidet; zieht man AC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. $AC = CD$ (§. 45.); daher $BC + AC = BC + CD = BD$ = der gegebenen Summe der Hypotenuse und der einen Kathete.

12) die Differenz zwischen der Hypotenuse und der einen Kathete und die andere Kathete.

Auflösung. Es sey (Fig. 86.) NAM ein rechter Winkel und AC die gegebene Kathete; verlängere AB rückwärts, so daß AD die gegebene Differenz wird; ziehe DC und mache $\angle DCB = \angle BDC$, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Fig. 86.



Beweis. $\triangle DBC$ gleichschenkelig (§. 45.), also $DB = BC$ oder $AB + AD = BC$; d. h. $AD = BC - AB$.

13) die Differenz zwischen der Hypotenuse und der einen Kathete und ein spitzer Winkel.

Auflösung. Aehnlich der vorigen.

14) eine Kathete und die Höhe (die Senkrechte von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse).

Auflösung. Aehnlich der der 2. Aufgabe dieses §.

15) die Hypotenuse und die Höhe.

Auflösung. Ueber der Hypotenuse beschreibe man, als über einem Durchmesser, einen Halbkreis, errichte in einem beliebigen Punkt desselben eine Senkrechte = der gegebenen Höhe u. s. w.

Wie müssen hier die gegebenen Stücke beschaffen seyn, wenn die Auflösung möglich seyn soll? Wann gibt es nur ein Dreieck? Welche Beschaffenheit hat dieses eine Dreieck? Wenn es zwei Dreiecke gibt, sind diese congruent?

16) die Höhe und ein spitzer Winkel.

Auflösung. Aehnlich der der 3. Aufgabe dieses §.

17) die Differenz zwischen einer Kathete und der Höhe und ein spitzer Winkel.

Auflösung. Aehnlich der der 13. Aufgabe dieses §.

18) die Höhe und ein anliegender Abschnitt (d. h. das Stück der Hypotenuse zwischen der Senkrechten aus der Spitze des rechten und dem Scheitel eines spitzen Winkels).

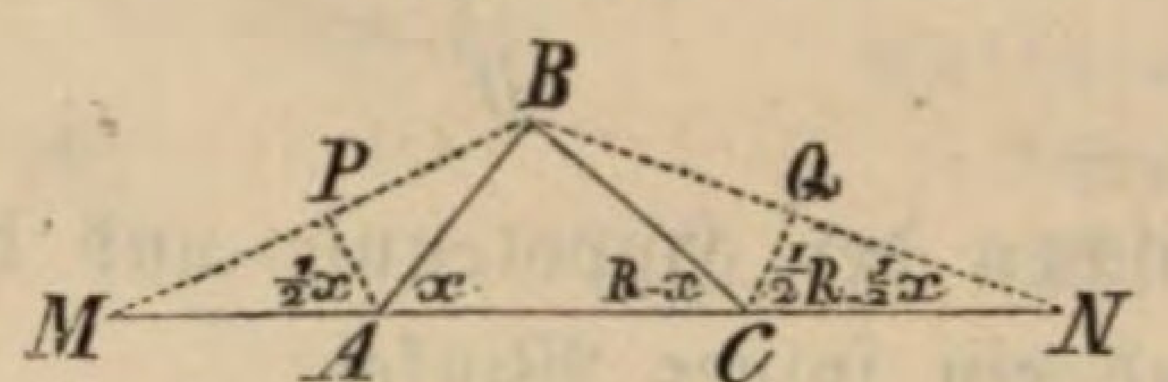
Auflösung. Aehnlich der der 1. Aufgabe dieses §.

19) die beiden Abschnitte der Hypotenuse.

Auflösung. In Fig. 82. ist die Gerade $AC = AD + DC =$ den beiden Abschnitten; über AC ein Halbkreis beschrieben und BD senkrecht auf AC errichtet; u. s. w.

20) die Summe der drei Seiten und ein spitzer Winkel.

Fig. 87.



Auflösung. Es sey (Fig. 87.) MN die gegebene Summe der drei Seiten und x der gegebene spitze Winkel, so ist $R - x$ der andere spitze Winkel.

Wenn nun $\angle BMN = \frac{1}{2}x$ und $\angle BNM = \frac{R-x}{2}$ construirt wird, muß es einen Durchschnitt B geben? Wenn MB in P und NB in Q halbirt und $AP \perp MB$, sowie $CQ \perp NB$ errichtet wird, muß die Gerade MN in den Punkten A, C getroffen werden? Ist, wenn AB und BC gezogen ist, das Dreieck ABC das verlangte?

21) Eine Kathete, und der eine spitze Winkel soll doppelt so groß seyn, als der andere.

Auflösung. Wenn man einen rechten Winkel in drei gleiche Theile theilt (§. 44, 7.), so wird der eine Theil den einen spitzen und die Summe der beiden andern Theile den andern spitzen Winkel des verlangten Dreiecks geben. Das Uebrige leicht.

Wie würde zu verfahren seyn, wenn der eine spitze Winkel das Dreifache des andern seyn soll?

22) Ein rechtwinkeliges gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben ist:

a) eine Kathete.

b) die Hypotenuse.

c) die Summe der beiden Katheten.

d) die Summe der Hypotenuse und einer Kathete.

e) die Differenz zwischen der Hypotenuse und einer Kathete.

f) die Summe der drei Seiten.

g) die Höhe.

h) ein Abschnitt der Hypotenuse.

i) die Differenz zwischen einer Kathete und der Höhe.

Auflösung. Man erinnere sich, daß im gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreieck die beiden Katheten gleich sind, eben so die beiden spitzen Winkel (jeder $= \frac{1}{2}$R) und auch die beiden Abschnitte der Hypotenuse, und daß ferner die Höhe den rechten Winkel halbirt, so werden die Lösungen leicht zu Stande kommen.

Welchen Aufgaben dieses §. entsprechen die in dieser Nummer aufgeführten?

§. 79.

Aufgabe. Ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, wenn gegeben ist:

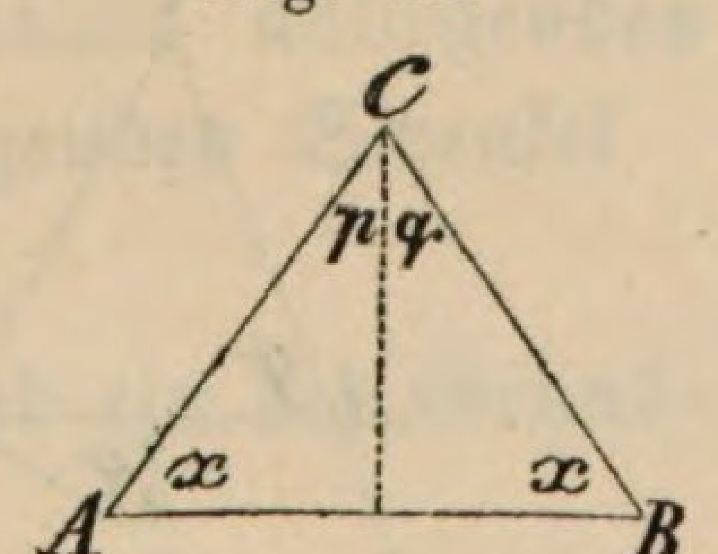
1) die Grundlinie und ein Schenkel.

Auflösung. S. §. 43. Z. 2.

2) die Grundlinie und ein derselben anliegender Winkel.

Auflösung. An den beiden Endpunkten der gegebenen Grundlinie AB construire man (§. 29.) ∠CAB = CBA = dem gegebenen Winkel. (Fig. 88.)

Fig. 88.



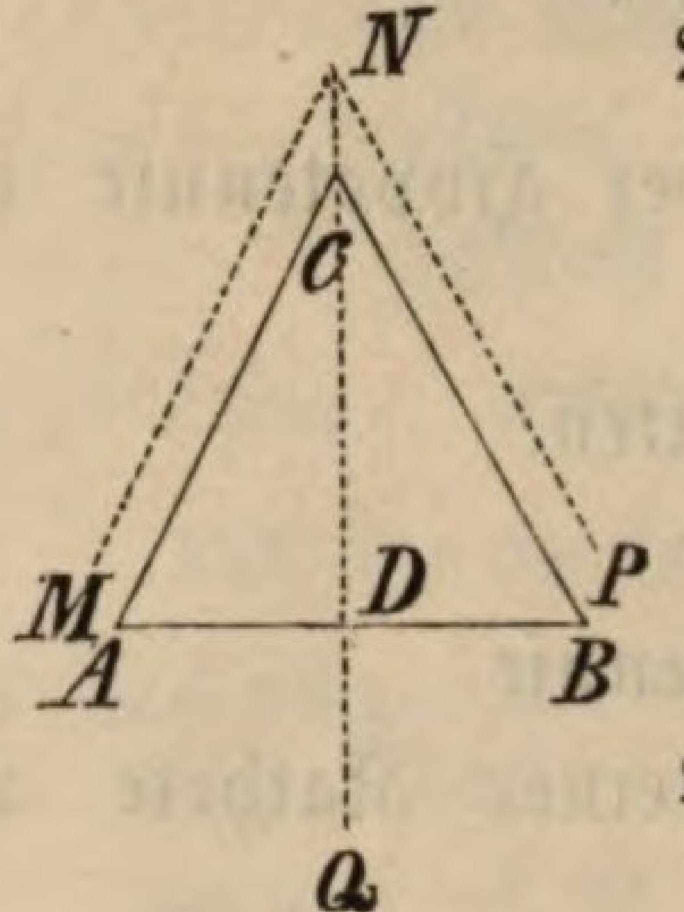
Beweis. Beruht auf §. 44.

Wie muß der gegebene Winkel hinsichtlich seiner Größe beschaffen seyn?

3) die Grundlinie und der Winkel an der Spitze.

Auflösung 1. Kennt man den Winkel an der Spitze, so ist der Winkel an der Grundlinie auch bekannt, (vergl. §. 44. Z. 4); mithin die vorige Auflösung.

Fig. 89.



2. Halbire den gegebenen Winkel MNP (Fig. 89.) durch QN (§. 50.), und in einem beliebigen Punkt D errichte man auf QN eine Senkrechte DA = der halben gegebenen Grundlinie; durch A ziehe man AC || MN, verlängere AD, so daß AD = DB wird, und ziehe BC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. $\triangle ADC \cong \triangle BDC$ (§. 38.), also AC = BC und $\angle$ ACD = $\angle$ DCB. Auch ist (nach §. 16.) $\angle$ ACD = $\angle$ MNQ = $^1/_2$ $\angle$ MNP (B. D. E.); daher $\angle$ ACD + $\angle$ DCB = $\angle$ MNP. Endlich ist AD = der halben gegebenen Grundlinie; folglich, da AD = DB, auch AD + DB = der gegebenen Grundlinie.

4) ein Schenkel und ein Winkel an der Grundlinie.

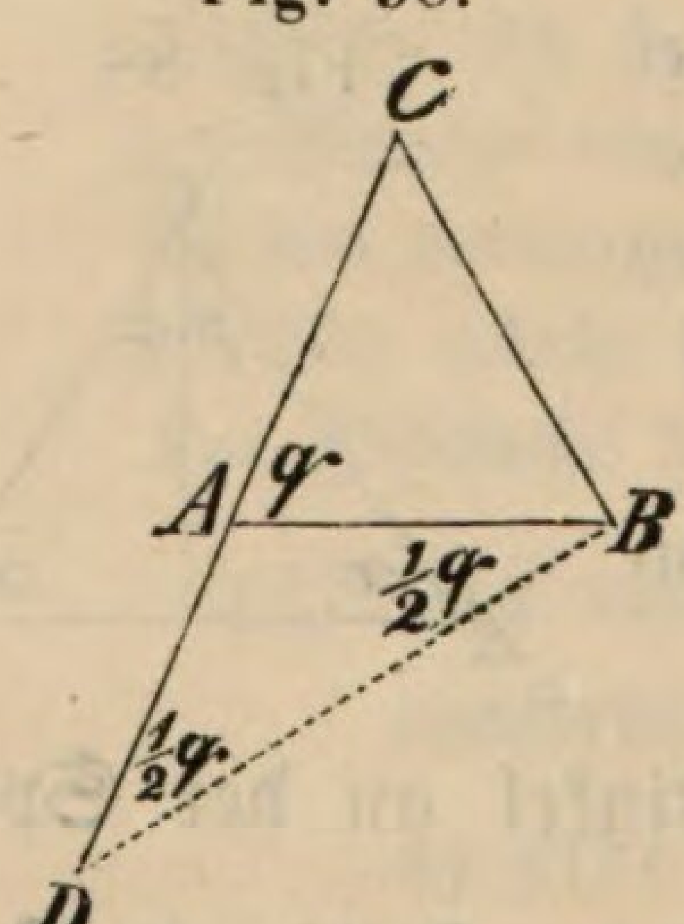
Auflösung. Auf dem einen Schenkel des gegebenen Winkels x (Fig. 88.) trage man AC = dem gegebenen Schenkel des Dreiecks ab und mache BC = AC, so ist $\triangle$ ABC das verlangte.

5) ein Schenkel und der Winkel an der Spitze.

Auflösung. Auf den beiden Schenkeln des gegebenen Winkels ACB (Fig. 88.) trage man die Gegebene AC = BC ab.

6) die Summe eines Schenkels und der Grundlinie und ein Winkel an der Grundlinie.

Fig. 90.



Auflösung. Der gegebene Winkel an der Grundlinie sey q, so ist der Winkel an der Spitze (§. 44. Z. 4.) = 2R − 2q oder 2 (R − q). Man construire diesen letztern Winkel und nenne ihn C.

An CD (Fig. 90.), der gegebenen Summe eines Schenkels und der Grundlinie, lege man im Punkte D den Winkel CDB = $^1/_2$ q und im Punkte C den Winkel DCB = C = 2 (R − q); in dem Durchschnittspunkt B construire man zu DB den Winkel ABD = $^1/_2$ q; so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis $\angle ADB = \angle ABD = \frac{1}{2}q$; daher $AD = AB$ (§. 45.); daher $AC + AB = AC + AD = CD$. Auch ist $\angle CAB = \angle 2ADB = q$ (§. 44. Z. 3.). Ferner $\angle CAB + \angle ACB + \angle ABC = 2R$, oder $q + 2R - 2q + ABC = 2R$, daraus $q = \angle ABC$; also $AC = BC$, d. h. $\triangle ABC$ gleichschenkelig.

7) die Summe eines Schenkels und der Grundlinie und der Winkel an der Spitze.

Auflösung der vorigen ähnlich.

8) die Grundlinie und die Senkrechte aus der Spitze auf diese.

Auflösung. Ganz leicht.

9) ein Schenkel und die Senkrechte auf die Grundlinie.

Auflösung. Vergl. Aufgabe 2. in §. 78.

10) ein der Grundlinie anliegender Winkel und die Senkrechte auf die Grundlinie.

Auflösung. Vergl. Aufgabe 3. in §. 78.

11) die Grundlinie und die Summe eines Schenkels und der Senkrechten auf der Grundlinie.

Auflösung. Vergl. Aufgabe 11. in §. 78.

12) die Grundlinie und die Differenz zwischen einem Schenkel und der Senkrechten auf der Grundlinie.

Auflösung. Vergl. Aufgabe 12. in §. 78.

13) die Grundlinie und die Senkrechte von dem Scheitel eines an der Grundlinie anliegenden Winkels auf den gegenüberliegenden Schenkel.

Auflösung. Vergl. Aufgabe 2. in §. 78.

14) die Summe der drei Seiten und ein der Grundlinie anliegender Winkel.

Auflösung. Vergl. Aufgabe 20. des §. 78.

15) die Summe der drei Seiten und die Senkrechte auf die Grundlinie.

Auflösung. Vergl. die Auflösung der 20. Aufgabe in §. 78, und

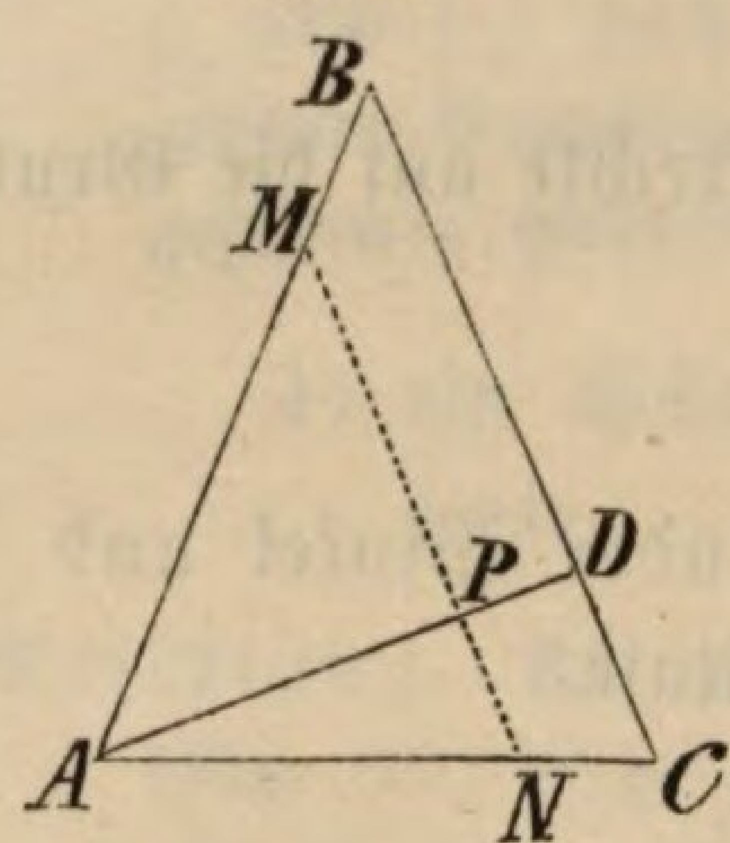
bemerke noch, in welchem Punkt die gegebene Senkrechte auf der gegebenen Summe der drei Seiten steht.

11) ein Schenkel und die auf demselben aufstehende Höhe.

Auflösung. Vergl. Aufgabe 2. in §. 78.

17) ein Winkel an der Grundlinie und die Senkrechte aus der Spitze dieses Winkels auf den gegenüberliegenden Schenkel.

Fig. 91.



Auflösung. Construire ein gleichschenkeliges △ANM (Fig. 91.), das den gegebenen Winkel an der Grundlinie hat, und ziehe AP ⊥ NM; auf AP, oder deren Verlängerung, trage man die gegebene Senkrechte AD ab, und ziehe durch D die Gerade CB || NM, so ist △ABC das verlangte.

18) Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, wenn gegeben ist:

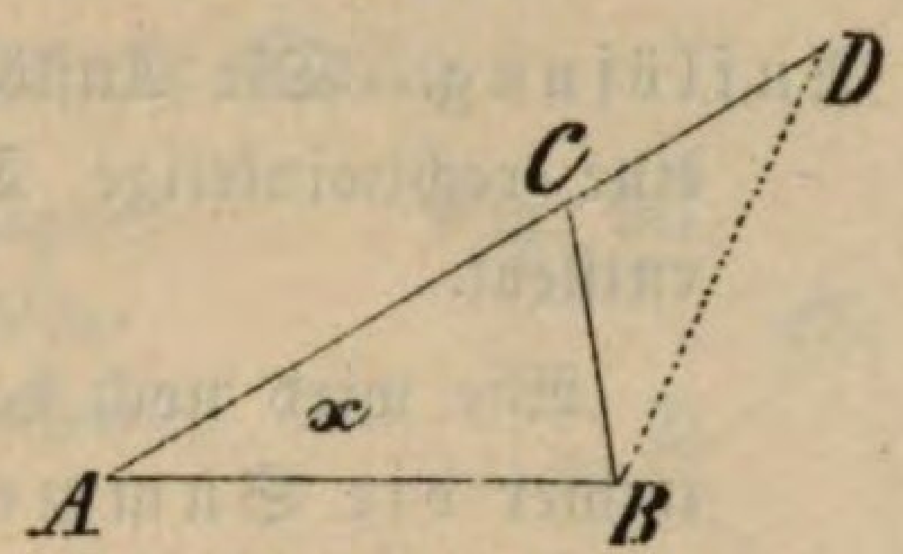
a) eine Seite.
b) die Höhe.
c) die Summe einer Seite und der Höhe.
d) die Differenz zwischen einer Seite und der Höhe.
e) die Summe der Höhe und eines Abschnittes der Grundlinie.
f) die Differenz zwischen der Höhe und eines Abschnittes der Grundlinie.

§. 80.

Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren, wenn gegeben ist:

1) eine Seite, ein ihr anliegender Winkel und die Summe der beiden andern Seiten.

Fig. 92.



Auflösung. Der gegebene Winkel sey x (Fig. 92.); den einen Schenkel desselben mache man = AB = der gegebenen Seite, und den andern Schenkel = AD = der Summe der beiden andern Seiten, ziehe DB und construire ∠CBD = ∠CDB; so ist ABC das verlangte Dreieck.

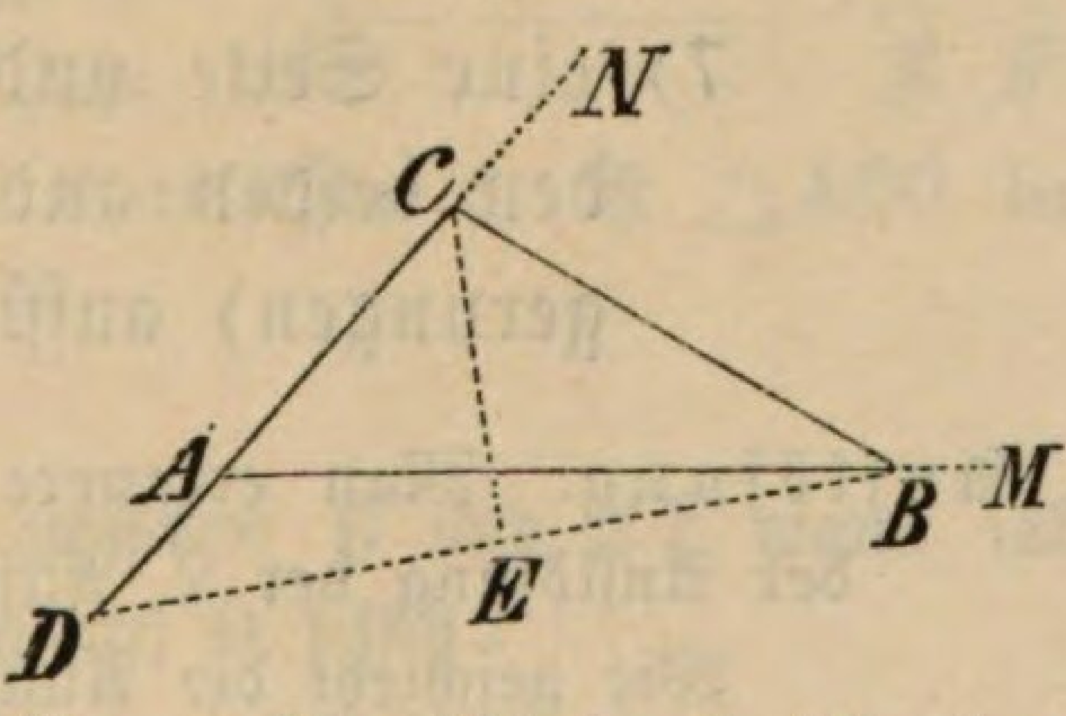
Beweis. △CDB ist gleichschenkelig (§. 45.), also CD = CB; daher AC + CB = AC + CD = AD; ferner hat das Dreieck den gegebenen Winkel x und die gegebene Grundlinie AB.

2) eine Seite, der ihr gegenüberliegende Winkel und die Summe der beiden andern Seiten.

Auflösung der vorigen ähnlich; nur erforsche man noch, wie groß ∠CDB werden muß, wenn △CDB gleichschenkelig werden soll, im Vergleiche mit dem gegebenen Winkel ACB.

3) eine Seite, ein ihr anliegender Winkel und die Differenz der beiden andern Seiten.

Fig. 93.



Auflösung. Der gegebene Winkel sey NAM (Fig. 93.); trage auf AM die gegebene Seite AB ab, verlängere den andern Schenkel NA rückwärts, so daß AD = der gegebenen Differenz der beiden andern Seiten wird, ziehe DB, errichte im Punkte E, der Mitte von DB, eine Senkrechte, welche AM in C schneidet, so ist △ABC das verlangte Dreieck.

Wie wird der **Beweis** vollständig geführt?

In der Auflösung liegt hier der gegebene Winkel der kleinern gesuchten Seite an; wie wäre aber die Auflösung abzuändern, wenn der gegebene Winkel der größern gesuchten Seite anliegen soll?

4) eine Seite, der ihr gegenüberliegende Winkel und die Differenz der beiden andern Seiten.

Auflösung. Vergl. Aufgabe 3. des §. 79, und verfahre der Auflösung der vorigen Aufgabe ähnlich.

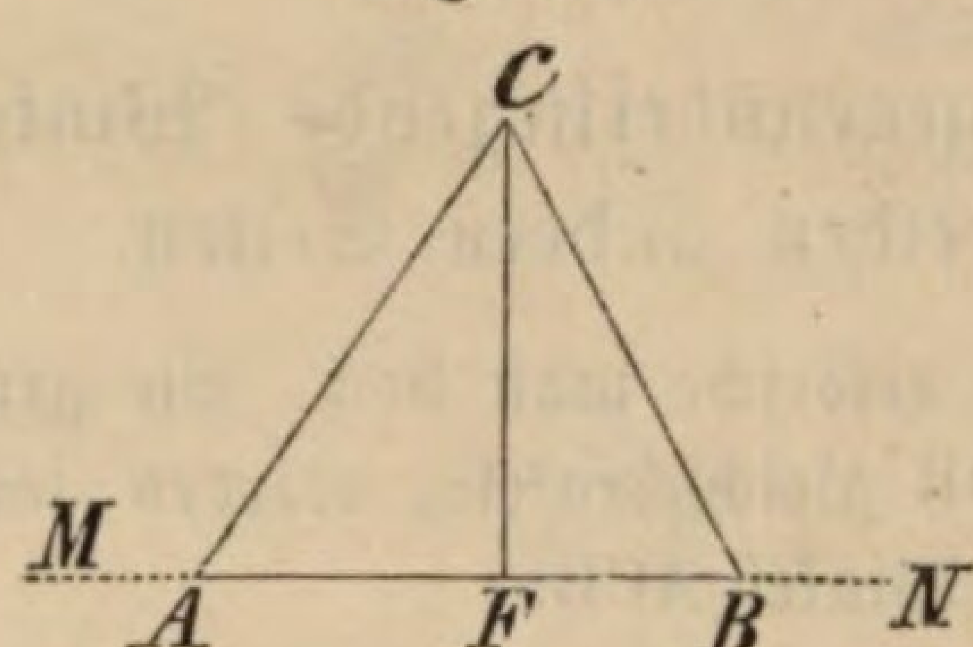
5) zwei Seiten und die Höhe auf einer von diesen.

Auflösung. Die Auflösung der 2. Aufgabe des §. 78. liefert das eine rechtwinkelige Dreieck, welches durch die gezogene Höhe entsteht.

Wie wird noch das zweite bestimmt? Ist das gesuchte Dreieck immer die Summe der beiden Dreiecke, welche die gezogene als gemeinschaftliche Seiten haben? Wann nicht?

6) zwei Seiten und die Höhe, die der dritten unbekannten Seite zugehört.

Fig. 94.



Auflösung. In einem beliebigen Punkt F (Fig. 94.) einer unbegrenzten Geraden MN errichte man die Senkrechte CF = der gegebenen Höhe und durchschneide MN von C aus mit zwei Halbmessern, die den gegebenen zwei Seiten gleich sind, in den Punkten A, B, so ist △ABC das verlangte.

Läßt sich mit diesen drei gegebenen Bestimmungsstücken nur ein Dreieck construiren, oder mehrere? Wie viele? Warum?

7) eine Seite und die beiden Höhen, welche auf den beiden andern Seiten (oder deren Verlängerungen) aufstehen.

Auflösung. Man erinnere sich des Winkels im Halbkreis, oder der Auflösung der 2. Aufgabe in §. 78.

Wie geschieht die Auflösung, wenn eine der gegebenen Höhen der gegebenen Seite selbst zugehört?

Geschieht die Auflösung mittelst des Halbkreises, welche Beschaffenheit hat das gesuchte Dreieck, wenn die beiden gegebenen Höhen innerhalb des Halbkreises oder in der Peripherie, oder deren Verlängerungen außerhalb der Peripherie sich durchschneiden?

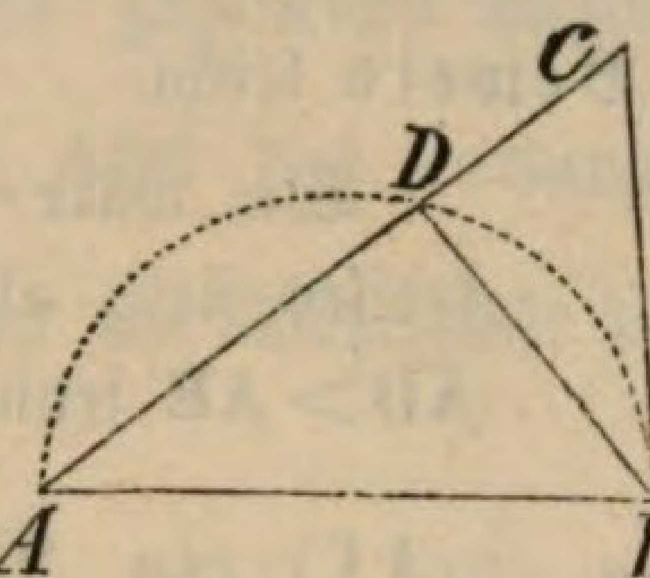
Trägt man die eine Höhe unterhalb des Durchmessers in den andern Halbkreis, so entsteht ein stumpfwinkeliges Dreieck, das dieselben Bestimmungsstücke hat. Man zeichne die dazu gehörige Figur.

8) eine Seite, ein ihr anliegender Winkel und die

Höhe aus der Spitze dieses Winkels auf die gegenüberliegende unbekannte Seite.

Auflösung. In Fig. 95. ist AB die gegebene Seite, ∠ ABC der gegebene Winkel, BD die gegebene Höhe; also ABC das gesuchte Dreieck.

Fig. 95.

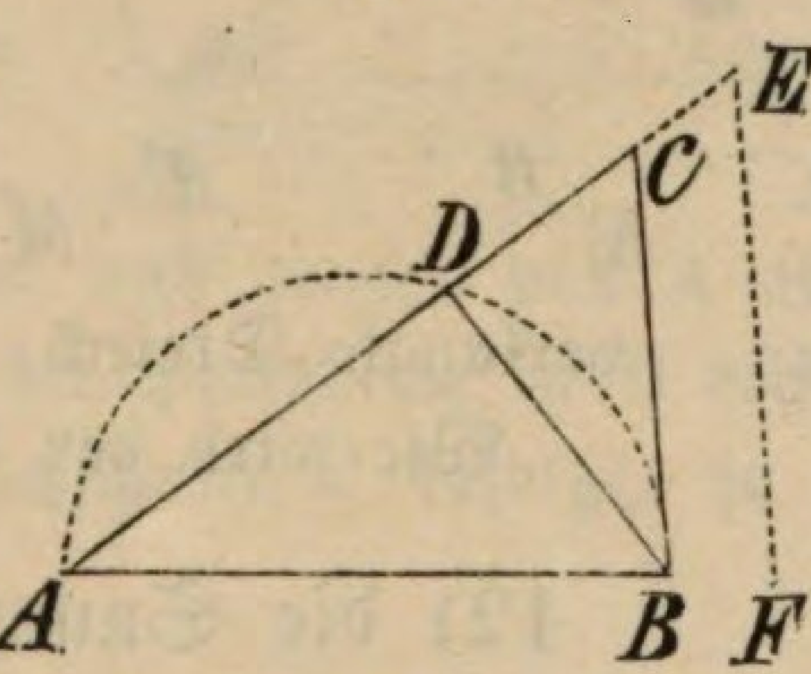


Wie ist nun die Construction von Schritt zu Schritt zu bewerkstelligen und der Beweis vollständig zu führen?

9) eine Seite, der dieser Seite gegenüberliegende Winkel und die Höhe aus der Spitze eines der gegebenen Seite anliegenden Winkels auf die gegenüberliegende unbekannte Seite.

Auflösung. Ueber AB = der gegebenen Seite beschreibe man einen Halbkreis (Fig. 96.), trage BD = der gegebenen Höhe von B aus als Sehne ein, ziehe AD unbestimmt lang; in einem beliebigen Punkt E der AD construire man ∠ AEF = dem gegebenen Winkel und ziehe BC || EF, bis der Durchschnitt C erfolgt, so ist △ABC das verlangte.

Fig. 96.



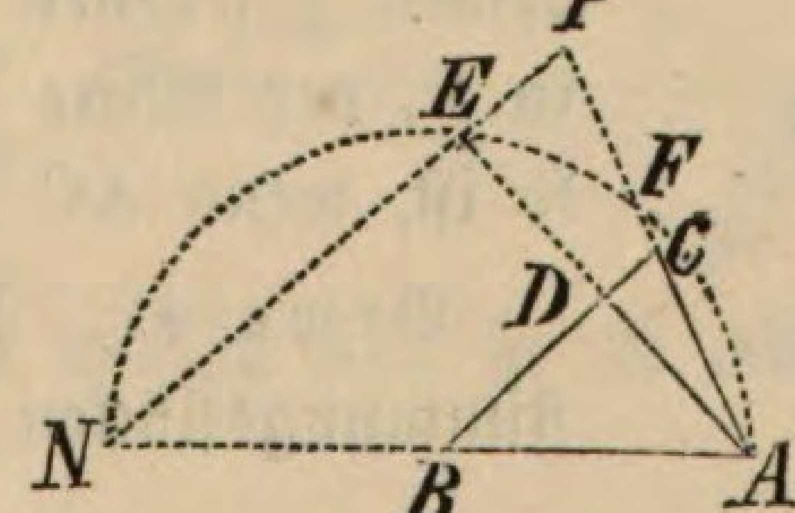
Man führe den Beweis!

Fällt der Punkt C immer zwischen D und E? wann fällt er zwischen A und D und wann auf D selbst?

10) zwei Winkel und die Höhe, aus der Spitze eines dieser Winkel auf die gegenüberliegende unbekannte Seite.

Auflösung. Ueber einer Geraden NA (Fig. 97.), von beliebiger Länge, beschreibe man einen Halbkreis und construire zugleich über NA ein Dreieck NAP, das die beiden gegebenen Winkel an NA anliegen hat, und dessen Seiten den Halbkreis in F und E schneiden; aus der Spitze A des Winkels NAP, aus welcher die

Fig. 97.



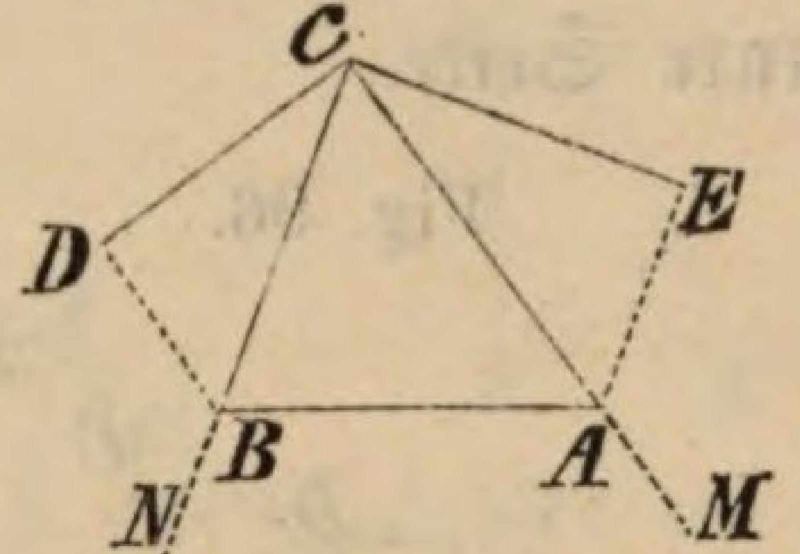
gegebene Höhe gezogen werden soll, trage man AE als Sehne ein, und auf AE, von A aus, die gegebene Höhe AD ab; legt man durch D die Gerade BC || NP, so ist, nachdem die Durchschnitte B, C erfolgt sind, ABC das verlangte Dreieck.

Beweis leicht.

Wie wäre aber zu verfahren, wenn P innerhalb des Halbkreises fiele, also kein Durchschnitt E, F erfolgte, oder wie, wenn AD > AE seyn sollte?

11) ein Winkel und die beiden Höhen aus den Spitzen der beiden andern Winkel auf die gegenüberliegenden unbekannten Seiten.

Fig. 98.

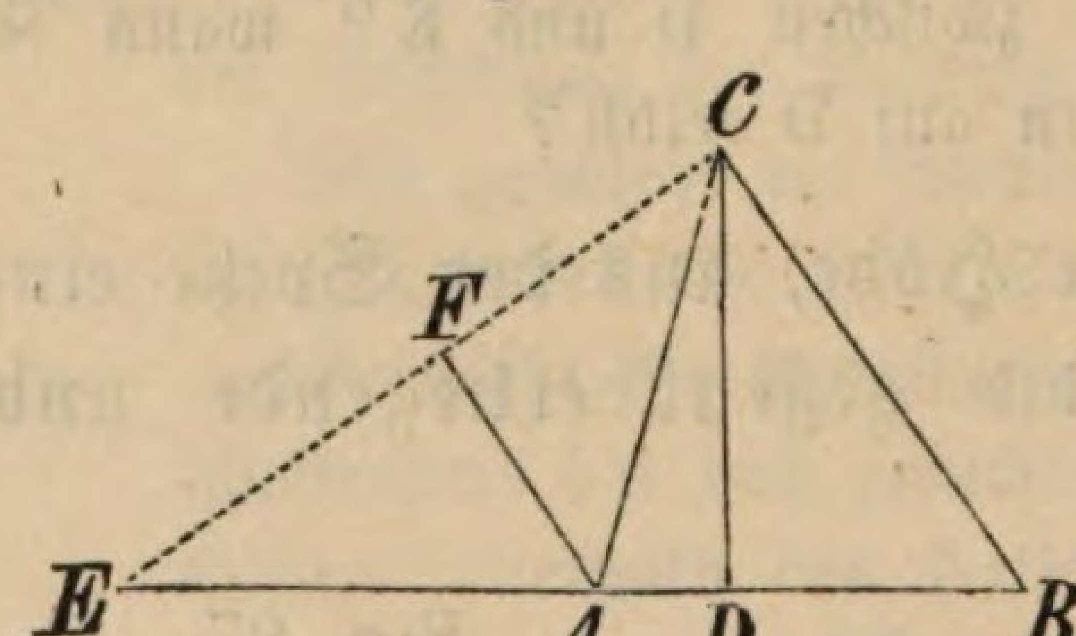


Auflösung. Man construire (Fig. 98.) ∠NCM = dem gegebenen, ferner ∠DCA = ∠ECB = R, mache CD, CE = den beiden gegebenen Höhen, errichte in D und E Senkrechte, welche die Schenkel CN, CM in den Punkten B, A schneiden; zieht man BA, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Wie wird der Beweis geführt?

12) die Summe der beiden ersten Seiten, die dritte Seite und die Höhe, welche der ersten Seite zugehört.

Fig. 99.



Auflösung. Man construire ein rechtwinkeliges Dreieck CDB (Fig. 99.), in welchem die Kathete CD die gegebene Höhe und die Hypotenuse BC die gegebene dritte Seite ist; verlängere BD über D hinaus, so daß BE = der Summe der beiden gegebenen ersten Seiten ist; zieht man CE und errichtet in F, der Mitte von CE, eine Senkrechte, welche BE in A trifft, so ist, wenn AC gezogen, △ABC das verlangte.

Beweis? Läßt sich nur ein Dreieck aus diesen drei Bestimmungsstücken construiren?

13) die Summe zweier Seiten und die zwei Win-

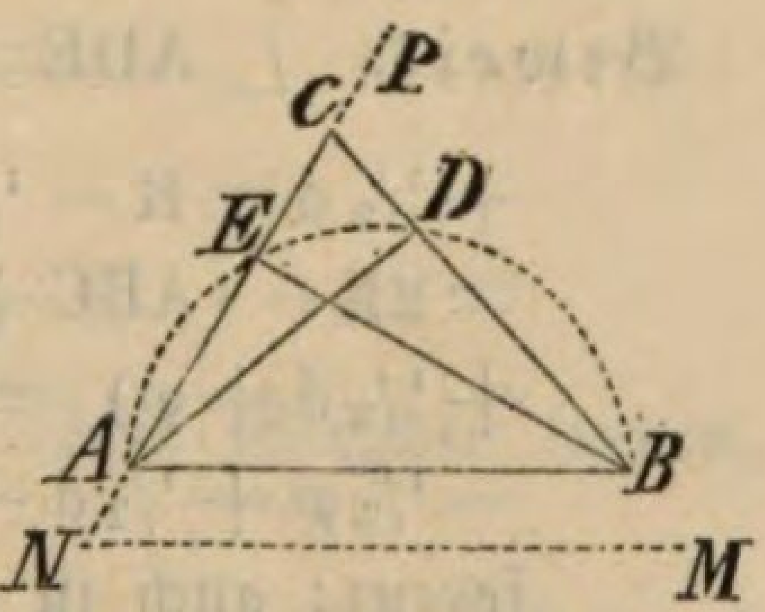
kel, welche den beiden gegebenen Seiten gegenüberliegen.

Auflösung. In Fig. 92. ist $AD = AC + BC =$ der gegebenen Summe; $\angle CAB$, $\angle CBA$ sind die beiden gegebenen Winkel; $\angle ADB = \frac{2R - (\angle CAB + \angle CBA)}{2}$ und $\triangle ABC$ das verlangte.

Wie geschah die Construction? wie kann die Richtigkeit derselben erwiesen werden?

14) ein Winkel, die aus der Spitze dieses Winkels gezogene Höhe und eine zweite Höhe.

Fig. 100.

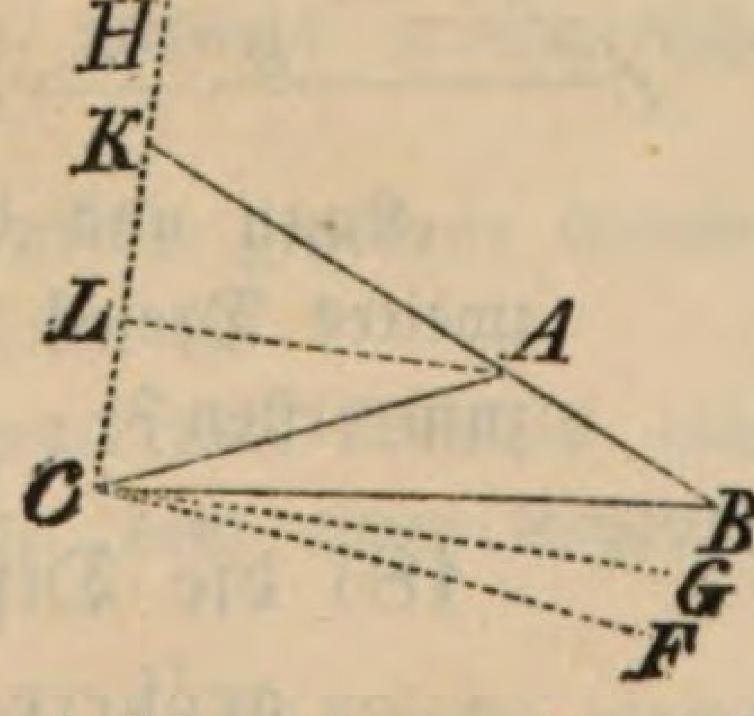


Auflösung. Man construire (Fig. 100.) einen Winkel $MNP =$ dem gegebenen, errichte in einem beliebigen Punkt E des einen Schenkels NP eine Senkrechte $EB =$ der gegebenen zweiten Höhe; ziehe $BA \parallel MN$, bis der Schenkel NP in A geschnitten ist; beschreibe über AB, als einen Durchmesser, einen Halbkreis und trage, von A aus, die erste Höhe als Sehne ein, welche die Peripherie in D trifft; zieht man BC durch D, bis der Durchschnitt C erfolgt, so ist $\triangle ABC$ das verlangte.

Warum?

15) eine Seite, die Differenz der beiden anliegenden Winkel und die Summe der beiden andern Seiten.

Fig. 101.

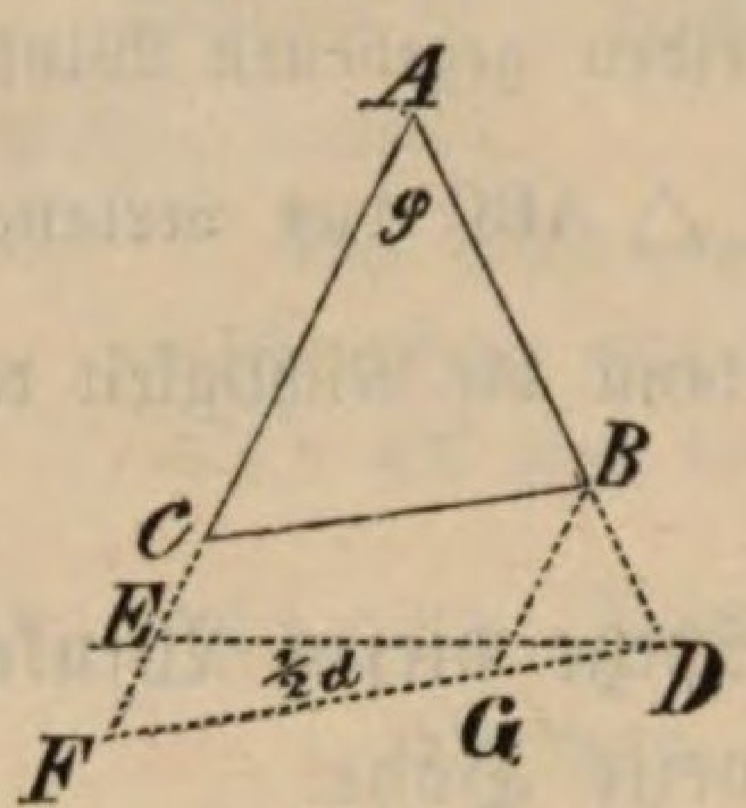


Auflösung. Es sey (Fig. 101.) BC die gegebene Seite und $\angle BCF =$ der gegebenen Differenz der beiden anliegenden Winkel; man halbire $\angle BCF$ durch CG, construire $\angle HCG = R$; durchschneide HC von B aus mit einem Halbmesser $BK =$ der gegebenen Summe der beiden unbekannten Seiten, in K; halbire KC in L; errichte LA senkrecht auf KC, bis KB in A getroffen ist; zieht man endlich AC, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

Man suche den Beweis.

16) eine Seite a, die Differenz d der beiden anliegenden Winkel und der gegenüberliegende Winkel φ.

Fig. 102.

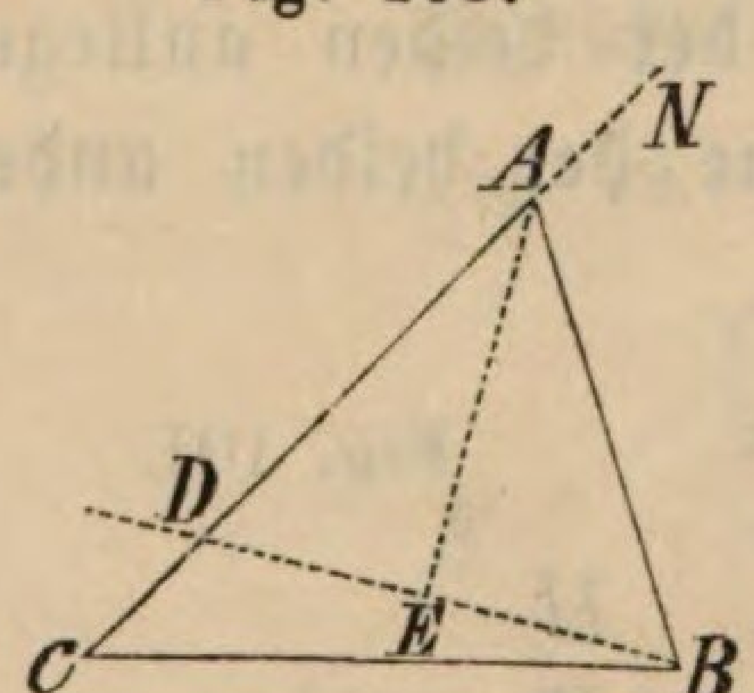


Auflösung. Man construire (Fig. 102.) ein gleichschenkeliges Dreieck AED, welches an der Spitze A den gegebenen Winkel φ hat, und einen Winkel EDF $= \frac{1}{2}d =$ der halben gegebenen Differenz der beiden anliegenden Winkel und verlängere (nöthigenfalls) AE bis der Durchschnitt F erfolgt; macht man nun FG $= a =$ der gegebenen Seite und zieht BG || AE und BC || DF, so ist $\triangle$ ABC das gesuchte.

Beweis. $\angle ADE = \frac{2R - \varphi}{2}$ (§. 44. Z. 4.), also $\angle ADF = \frac{2R - \varphi}{2} + \frac{1}{2}d = R - \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}d = \angle ABC$ (§. 16.); ferner $\angle ACB = 2R - (ABC + \varphi)$ (§. 35. Z. 2.), oder $\angle ACB = 2R - (R - \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}d + \varphi) = R - \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}d$; daher $\angle ABC - \angle ACB = R - \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}d - (R - \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{2}d) = d =$ der gegebenen Differenz; auch ist $BC = FG = a =$ dee gegebenen Seite.

17) eine Seite, die Differenz der beiden andern, und die Differenz der Winkel, welche der gegebenen Seite anliegen.

Fig. 103.



Auflösung. In Fig. 103. ist BC = der gegebenen Seite; $\angle$ DBC = der halben gegebenen Differenz der Winkel; CD = der Differenz der beiden Seiten; $\triangle$ ADB gleichschenkelig und ABC das gesuchte Dreieck.

Wie wird die Construction vollständig und der Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens geführt?

Kann aus diesen gegebenen drei Stücken vielleicht noch ein zweites Dreieck construirt werden, und wie verhält sich dieses zum ersten?

18) die Differenz zweier Seiten, die Höhe auf die größere dieser Seiten und die dritte Seite.

Auflösung. Ueber der gegebenen Seite beschreibe man einen Halbkreis, trage von dem einen Endpunkt dieser Seite (jetzt der

Durchmesser) die gegebene Höhe als Sehne ein, und ziehe eine Gerade durch den Durchschnittspunkt dieser Sehne mit der Peripherie des Kreises bis zum andern Endpunkt der gegebenen Seite; von diesem Endpunkt aus durchschneide man diese Gerade mit einem Halbmesser = der gegebenen Differenz der beiden Seiten und ziehe durch diesen Durchschnittspunkt und den ersten Endpunkt der gegebenen Seite eine gerade Linie; errichtet man in der Mitte dieser letztgezogenen Linie eine Senkrechte, so wird diese von der Geraden, die durch den zweiten Punkt der gegebenen Seite geht, geschnitten, und dieser Durchschnittspunkt ist der dritte Eckpunkt des gesuchten Dreiecks.

Man construire nach dieser Beschreibung die Figur und führe den Beweis.

§. 81.

Aufgaben.

1) Man soll mehrere Punkte der Verlängerung einer Geraden finden, ohne Gebrauch des Lineals.
2) Außerhalb einer Geraden ist ein Punkt gegeben; man soll durch diesen eine andere Gerade so legen, daß sie mit der ersten einen gegebenen Winkel macht.
3) Zwei Parallelen sind ihrer Lage nach gegeben; man soll durch einen Punkt außer ihnen eine Gerade so legen, daß das von den Parallelen abgeschnittene Stück eine gegebene Länge habe.
4) Einen Winkel zu construiren, welcher das doppelte, dreifache, vierfache eines gegebenen Winkels beträgt.
5) Man soll eine gegebene Linie in vier Theile theilen, die sich verhalten = m : n : p : q.
6) Von zwei geraden Linien ist bekannt ihre Summe und ihre Differenz; man soll die Linien selbst finden.
7) Zwischen zwei gegebenen geraden Linien die mittlere arithmetische Proportionale zu finden.
8) Eine gerade Linie so zu theilen, daß eine zweite gegebene Gerade die mittlere geometrische Proportionale zu ihnen ist.
9) Man soll zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels eine gegebene Gerade so eintragen, daß sie mit dem einen Schenkel einen gegebenen Winkel macht;
10) oder, daß sie mit den Schenkeln des Winkels gleiche Winkel macht.
11) Die beiden Schenkel eines Winkels sollen durch eine Gerade so geschnitten werden, daß diese mit einer gegebenen Linie parallel

laufe und das Stück derselben zwischen den Schenkeln des Winkels eine gegebene Länge habe.

12) Innerhalb der Ebene eines Winkels ist ein Punkt gegeben; man soll durch diesen eine Gerade bis an die Schenkel des Winkels so ziehen, daß sie in dem gegebenen Punkt halbirt ist;

13) oder, daß der gegebene Punkt die Gerade in zwei Theile theilt, die sich verhalten = m : n;

14) oder, man soll durch diesen Punkt eine Gerade legen, die von den Schenkeln dieses Winkels gleiche Stücke abschneide;

15) oder, daß sich die abgeschnittenen Stücke der Schenkel verhalten = m : n.

16) Außerhalb einer Geraden sind zwei Punkte gegeben, man soll von diesen aus auf einen Punkt der Geraden zwei Linien ziehen, die sich gleich sind;

17) oder, die mit der Geraden gleiche Winkel bilden;

18) Es sind zwei convergirende Linien gegeben, ohne daß man ihren Durchschnittspunkt kennt; man soll zwischen diesen beiden, durch einen gegebenen Punkt, eine Gerade legen, die durch den unbekannten Durchschnittspunkt geht.

19) Man soll eine Gerade ziehen, die die Ebene zwischen zwei convergirenden Linien, deren Durchschnittspunkt unbekannt ist, halbirt.

20) Es soll ein Dreieck gezeichnet werden, von welchem die Summe der drei Seiten und

a) zwei Winkel,

b) ein Winkel und eine Höhe,

gegeben ist.

21) Ein Dreieck zu construiren, wenn die Differenz zweier Seiten die Höhe auf die kleinere dieser Seiten und die dritte Seite gegeben ist.

22) Ein Dreieck zu construiren, wenn gegeben ist: eine Seite und die beiden Geraden, welche von den Spitzen der dieser Seite anliegenden Winkel aus die beiden andern Seiten halbiren.

23) Ein Dreieck zu construiren, das einem gegebenen ähnlich ist;

24) oder dessen Seiten sich verhalten = m : n : p.

Dritter Abschnitt.

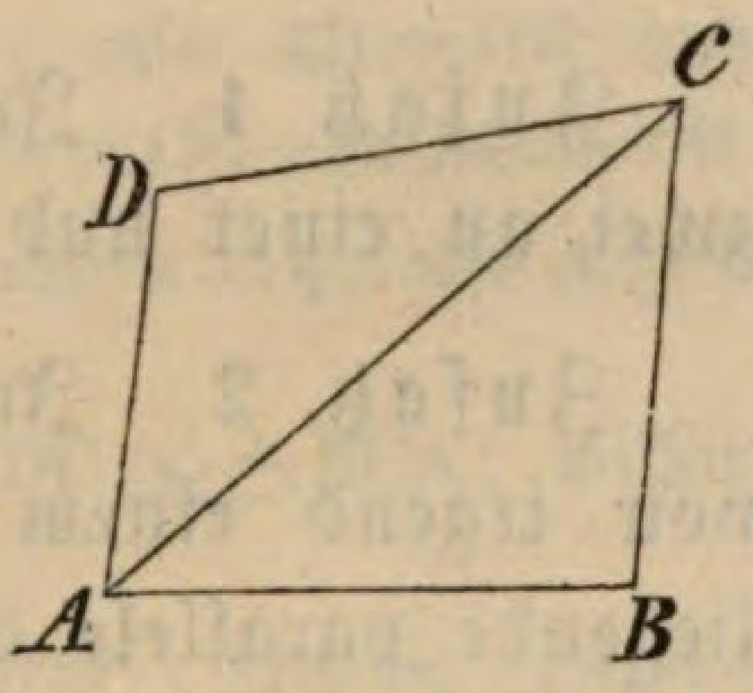
Die Vierecke und Vielecke.

---

§. 82.

Lehrsatz. Die vier innern Winkel einer vierseitigen Figur sind zusammengenommen gleich vier Rechten.

Fig. 104.



Beweis. Zieht man im Viereck ABCD (Fig. 104.) die Diagonale AC, so entstehen zwei Dreiecke, deren 6 Winkel zusammen 4R (§. 35. Z. 2.) betragen; nun sind diese 6 Winkel aber nichts anderes, als die 4 Winkel des Vierecks, folglich sind diese 4 Winkel = 4R.

Zusatz 1. Sind also in einer vierseitigen Figur drei Winkel bekannt, so ist auch der vierte bekannt und ist die Summe zweier Winkel bekannt, so ist auch die Summe der beiden andern mit gegeben.

Zusatz 2. Sind die vier Winkel einander gleich, so ist jeder = R. Auch kann $A + D = 2R$ und zu gleicher Zeit $A + B = 2R$ Statt finden, d. h. die gegenüberliegenden Seiten AD, BC, so wie AB, DC können parallel laufen. Eben so kann auch $AD = DC = BC = AB$ seyn. Aus diesem Allen ergibt sich nun die Möglichkeit folgender vierseitiger Figuren.

§. 83.

Erklärung. Eine vierseitige Figur, in welcher je zwei gegenüberliegende Seiten parallel liegen, heißt Parallelogramm; hier unterscheidet man:

1) Je zwei zusammenstoßende Seiten sind gleich und schließen ein

a) rechte Winkel [Quadrat] (Fig. 106.);
b) schiefe Winkel [Rhombus] (Fig. 108.);

2) Je zwei zusammenstoßende Seiten sind ungleich und schließen ein

a) rechte Winkel [Rechteck] (Fig. 107.);
b) schiefe Winkel [Rhomboid] (Fig. 105.).

Jedes andere Viereck, das kein Parallelogramm ist, heißt entweder Trapez, wenn nur ein Paar Seiten parallel liegen, oder Trapezoid, in welchem keine Seite einer andern parallel ist.

Zusatz 1. Im Parallelogramm ist die Summe der zwei an einer und derselben Seite liegenden Winkel = 2R.

Zusatz 2. Im Parallelogramm heißt die Senkrechte von irgend einem Punkt einer Seite auf die gegenüberliegende parallele Seite (oder deren Verlängerung) gefällt, die Höhe des Parallelogramms. Also kann das Parallelogramm höchstens zwei verschiedene Höhen haben.

§. 84.

Lehrsatz. Wenn in einem Viereck einer von folgenden fünf Fällen

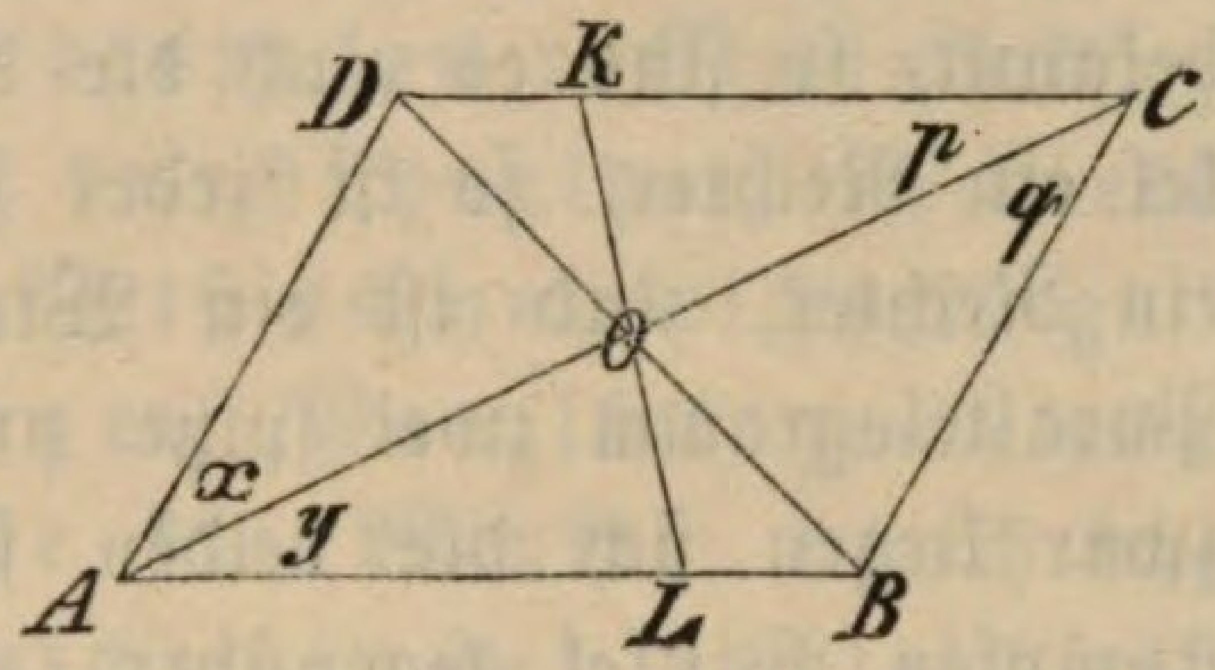
I. je zwei gegenüberliegende Winkel sind gleich,

II. je zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel,

III. je zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich,

IV. zwei gegenüberliegende Seiten sind gleich und parallel,

Fig. 105.



V. die beiden Diagonalen halbiren sich gegenseitig,

Statt findet, so finden immer die vier übrigen auch zugleich Statt. (Fig. 105.)

Beweis. I. Ist $A = C$ und $D = B$, so ist, weil

$$A + B + C + D = 4R,$$

auch $2A + 2D = 4R$

oder $A + D = 2R$, d. h. $AB \parallel DC$

und eben so ist $A + B = 2R$, also $AD \parallel BC$. (§. 15, 1.)

Aus dem Parallelseyn der gegenüberliegenden Seiten ergibt sich $y = p$; $x = q$; daher $\triangle ACD \cong \triangle ABC$; also $AB = DC$ und daraus auch $\triangle AOB \cong \triangle COD$ und also $AO = OC$ und $BO = OD$.

II. Ist $AB \parallel DC$ und $AD \parallel BC$, so ist $y = p$ und $x = q$; also $A = C$ u. s. w.

III. Ist $AB = DC$ und $AD = BC$, so ist $\triangle ADC \cong \triangle BCA$; mithin $y = p$ und $x = q$ u. s. w.

IV. Ist $AB \# DC$, so ist $y = p$, $AC = AC$; daher $\triangle ABC \cong \triangle ADC$; folglich $x = q$ und also auch $AD \# BC$ u. s. w.

V. Ist $AO = OC$ und $BO = OD$, so ist $\triangle AOB \cong \triangle COD$; daher $y = p$, mithin $AB \parallel DC$ und $AB = DC$ u. s. w.

Zusatz 1. Also sind in jedem Parallelogramm

1) die gegenüberliegenden Winkel gleich,
2) die gegenüberliegenden Seiten gleich,
3) jedes Paar gegenüberliegender Seiten gleich und parallel,
4) halbiren sich die beiden Diagonalen gegenseitig.

Zusatz 2. Also ist jedes Viereck ein Parallelogramm, wenn

1) die gegenüberliegenden Winkel gleich sind,
2) die gegenüberliegenden Seiten gleich sind,
3) ein Paar gegenüberliegender Seiten gleich und parallel ist,
4) die beiden Diagonalen sich gegenseitig halbiren.

Zusatz 3. Ist in einem Parallelogramm ein Winkel bekannt, so sind es auch die drei übrigen und ist ein Winkel ein Rechter, so ist jeder der übrigen Winkel ebenfalls ein Rechter, und ist ein Winkel ein schiefer, so hat das Parallelogramm zwei spitze und zwei stumpfe Winkel und zwar liegen sich die beiden spitzen und ebenso die beiden stumpfen Winkel gegenüber.

Also hat das Quadrat und das Rechteck vier rechte Winkel, der Rhombus und das Rhomboid aber zwei stumpfe und zwei spitze Winkel.

Zusatz 4. Das Parallelogramm wird durch jede Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt.

Zusatz 5. Sind in einem Parallelogramm zwei zusammenstoßende Seiten einander gleich, so ist es gleichseitig.

Mithin hat das Quadrat vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel, und ist folglich eine regelmäßige Figur.

Zusatz 7. Wenn man in einem Parallelogramm ABCD (Fig. 108.) durch den Durchschnittspunkt O der beiden Diagonalen eine Gerade KL legt, bis zwei parallele Seiten getroffen sind, so theilt diese Gerade das Parallelogramm in zwei congruente Theile, während sie selbst im Punkt O halbirt wird.

Wovon man sich leicht überzeugen kann.

§. 85.

Lehrsatz. I. In den rechtwinkeligen Parallelogrammen sind die beiden Diagonalen einander gleich, in den schiefwinkeligen aber ungleich, und umgekehrt: sind in einem Parallelogramm die beiden Diagonalen gleich, so ist es rechtwinkelig; sind diese aber ungleich, so ist es schiefwinkelig.

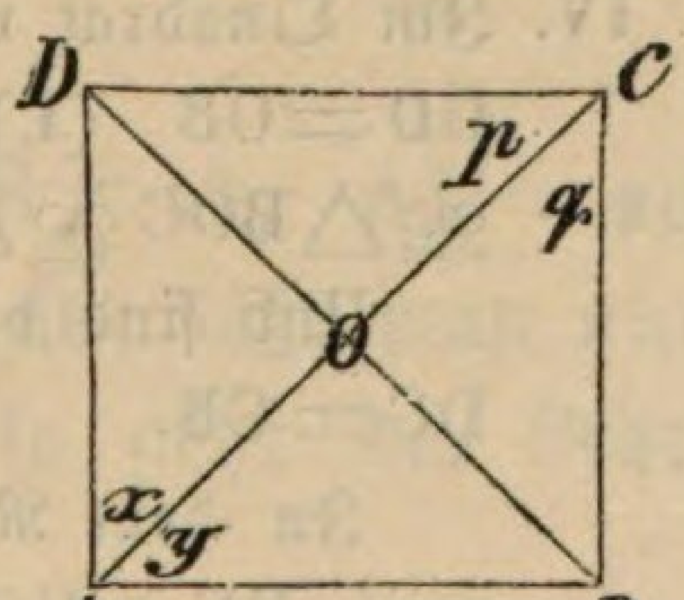
II. In den gleichseitigen Parallelogrammen durchschneiden sich die Diagonalen rechtwinkelig, in den ungleichseitigen aber schiefwinkelig,

und umgekehrt: schneiden sich in einem Parallelogramm die Diagonalen rechtwinkelig, so ist es gleichseitig, durchschneiden sich diese aber schiefwinkelig, so ist es ungleichseitig.

III. In den gleichseitigen Parallelogrammen theilt die Diagonale die Winkel, durch die sie geht, in zwei gleiche, in den ungleichseitigen aber in zwei ungleiche Theile, und umgekehrt: theilt in einem Parallelogramm die Diagonale die Winkel, durch die sie geht, in zwei gleiche Theile, so ist es gleichseitig, sind diese aber ungleich, so ist es ungleichseitig.

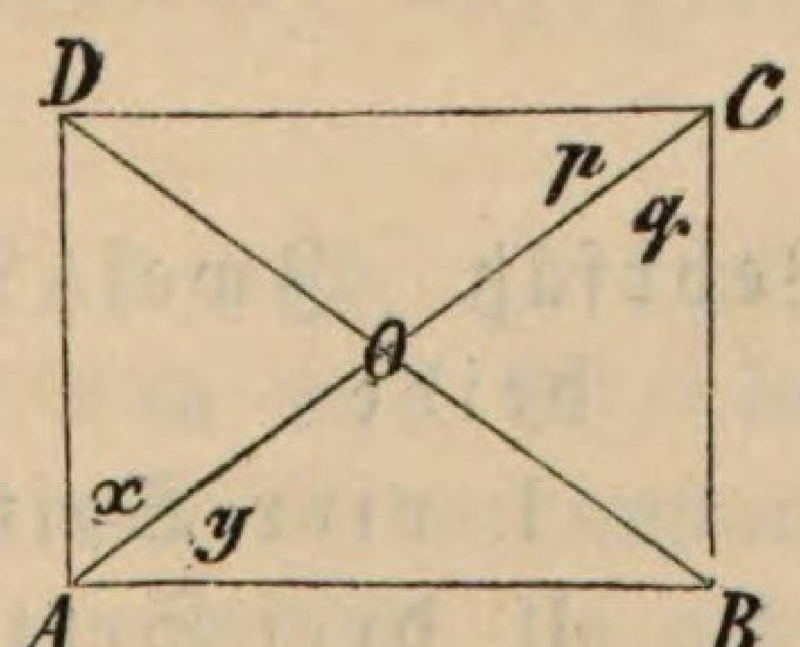
IV. Die gleichseitigen Parallelogramme werden von den beiden Diagonalen in vier congruente, die ungleichseitigen aber nur in je zwei sich gegenüberliegende congruente Dreiecke zerlegt, und umgekehrt: sind in einem Parallelogramm die vier Dreiecke, die durch die zwei gezogenen Diagonalen entstehen, congruent, so ist es gleichseitig; sind aber von diesen Dreiecken nur je zwei sich gegenüberliegende congruent, so ist es ungleichseitig.

Fig. 106.



Beweis. I. In dem Quadrat ABCD (Fig. 106.) ist △ABD ≅ △ABC, daher BD = AC.

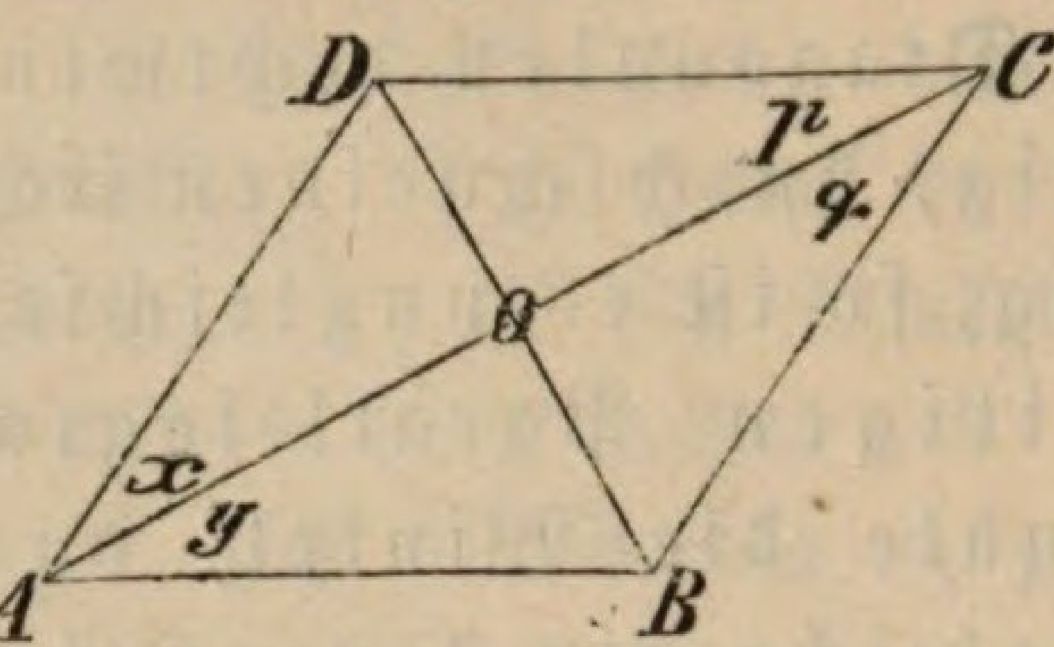
Fig. 107.



Im Rechteck EFGH (Fig. 107.) ist ebenfalls △HEF ≅ △GFE; mithin EG = FH.

Ist aber in diesem Rechteck EG = FH, so ist △EGF ≅ △FHE (weil y = p und q = x ist) also H = F; aber H + F = 2R (§. 84. Z. 1.), daher H = R, mithin (§. 84. Z. 3.) das Parallelogramm rechtwinkelig.

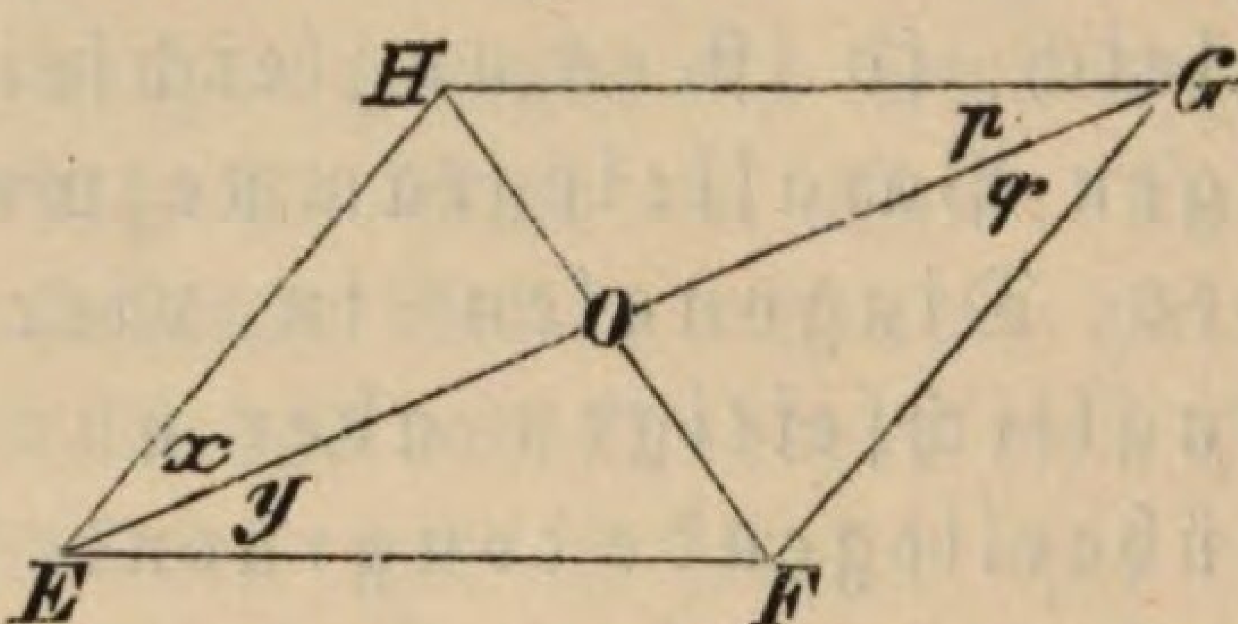
Fig. 108.



II. Im Quadrat ABCD (Fig. 106.) sind die Dreiecke ADB, BCD gleichschenkelig, folglich bei O rechte Winkel (§. 49.); dasselbe gilt im Rhombus (Fig. 108.).

Sind aber bei O rechte Winkel, so sind diese Dreiecke gleichschenkelig, und aus demselben Grund auch $\triangle$ADC gleichschenkelig (denn es ist auch DO $=$ OB, AO $=$ OB), also AB $=$ AD $=$ DC, mithin die Parallelogramme gleichseitig.

Fig. 109.



Nach §. 48. ist in Fig. 109. $\angle$EOF $\gtrless\angle$HOE, weil EF$\gtrless$HE; aus demselben Grund ist HE $\gtrless$ EF, weil $\angle$EOF $\gtrless\angle$HOF.

III. Aus II. dieses Beweises ergibt sich im Quadrat und im Rhombus (Fig. 106, 108.), daß x $=$ y und ist x $=$ y, auch AB $=$ AD ist.

Weil aber im Rechteck und dem Rhomboid (Fig. 107, 109.) EH $\gtrless$ HG, so ist auch x $\gtrless$ p, und da p $=$ y, so ist auch x $\gtrless$ y; und ist x $\gtrless$ y, so ist auch x $\gtrless$ p, also auch EH $\gtrless$ EG (§. 46. Z. 2.).

IV. Im Quadrat und im Rhombus (Fig. 106, 108.) ist AO $=$ OC; OD $=$ OB (I.), und AB $=$ AD $=$ DC $=$ CB; deshalb $\triangle$ABO $\cong\triangle$BOC $\cong\triangle$COD $\cong\triangle$DOA.

Und sind diese Dreiecke congruent, so ist offenbar AB $=$ AD DC $=$ CB.

In dem Rechteck und dem Rhomboid (Fig. 107, 109.) ist, weil HE $\gtrless$ HG, auch $\triangle$HOE nicht $\cong\triangle$HOG; sondern nur $\triangle$HOG und $\triangle$EOF und ebenso $\triangle$HOE $\cong\triangle$GOF. Ist aber $\triangle$HOE nicht $\cong\triangle$HOG, so muß HE $\gtrless$ HG seyn.

§. 86.

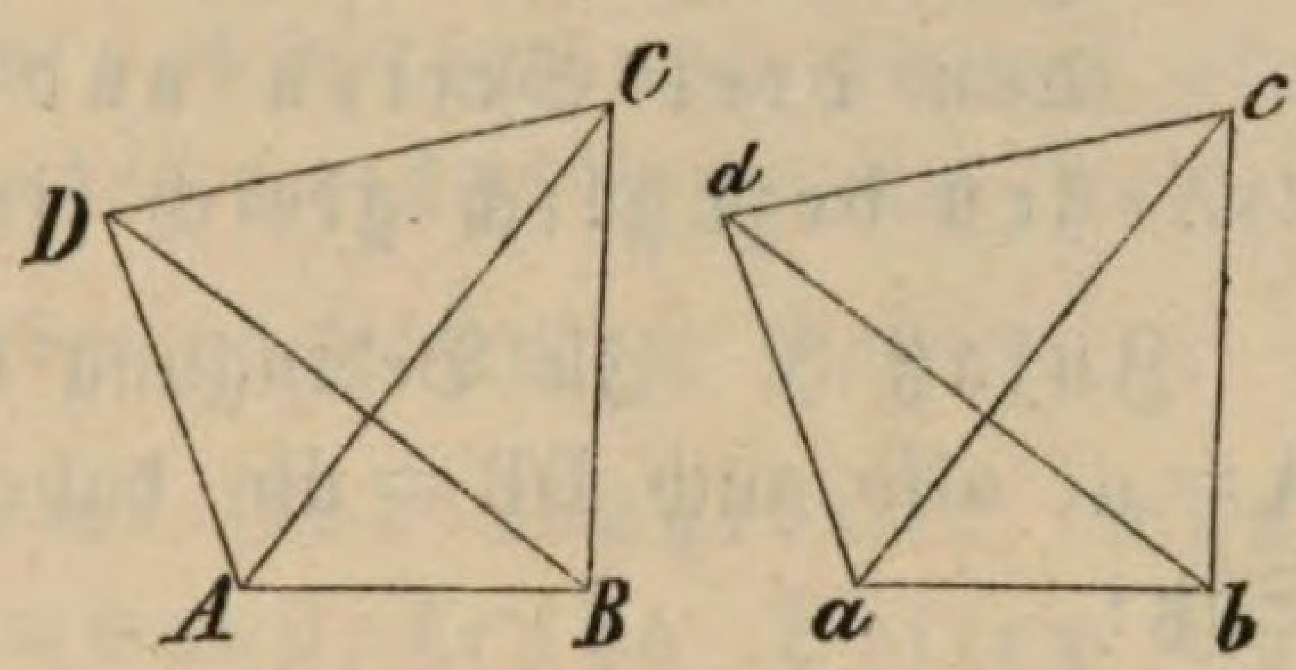
Lehrsatz. Zwei Vierecke sind congruent, wenn beide

I. vier Seiten und einen Winkel,

II. drei Seiten und die beiden von ihnen eingeschlossenen Winkel,

III. zwei Seiten und die diesen Seiten anliegenden drei Winkel bezüglich gleich haben. (Fig. 110.)

Fig. 110.



Bedingung.

I. AB = ab; BC = bc
AD = ad; DC = dc
A = a.

II. AB = ab; BC = bc
AD = ad; A = a
B = b.

III. AB = ab; AD = ad
A = a; B = b; D = d.

Behauptung.

ABCD ≅ abcd.

Beweis. I. Zieht man BD, bd, so muß △ABD und △abd sich decken (§. 38.), folglich auch △BDC und △bdc (§. 42.).

II. Zieht man AC, ac, so deckt sich △ABC und △abc (§. 38.) und jetzt auch △ADC und △adc (§. 38.).

III. Eben so deckt sich △ADB und △adb (§. 38.) und △DBC und △dbc (§. 40.).

Zusatz 1. Weil in Bedingung I. AB = ab, AD = ad, und A = a ist, so ist offenbar auch DB = db; läßt man nun A = a hinweg und setzt dafür BD = bd, so geht der Lehrsatz I. in folgenden über:

IV. Zwei Vierecke sind congruent, wenn beide vier Seiten und eine Diagonale bezüglich gleich haben.

Zusatz 2. Weil in Bedingung II. AB = ab, AD = ad, A = a, so ist BD = bd und weil AB = ab und BC = bc und B = b, so ist AC = ac; setzt man nun wieder anstatt der Winkel die Diagonalen als Bestimmungsstücke, so geht Lehrsatz II. über in folgenden:

V. Zwei Vierecke sind congruent, wenn in beiden drei Seiten und die beiden Diagonalen bezüglich gleich sind.

Zusatz 3. In Bedingung III. ist AB = ab, AD = ad, A = a; also auch DB = db, daher hat man auch folgenden Satz:

VI. Zwei Vierecke sind congruent, wenn beide zwei zusammenstoßende Seiten, die die Endpunkte dieser Seiten verbindende Diagonale und noch die zwei an diesen Endpunkten liegenden Winkel bezüglich gleich haben.

Zusatz 4. Auf diese Weise, wenn man die Diagonalen als Bestimmungsstücke, oder auch die Winkel, die die Diagonalen unter sich und mit den Seiten des Vierecks bilden, als solche will gelten lassen, können noch mehrere Lehrsätze über die Congruenz zweier Vierecke aufgestellt werden. Wir begnügen uns mit den bisher ausgesprochenen und überlassen es dem Fleiße des Anfängers, mehrere solcher Sätze aufzusuchen und zu beweisen. Nur einen wollen wir noch erwähnen, dessen Wahrheit leicht aus dem bisherigen erwiesen werden kann, nämlich

VII. Zwei Vierecke sind congruent, wenn in beiden die zusammengehörigen Abschnitte der beiden Diagonalen, sowie entweder der Neigungswinkel der beiden Diagonalen, oder eine Seite des Vierecks bezüglich gleich sind.

Zusatz 5. Geht das Viereck in ein Parallelogramm über, so wird

AB = DC; AD = BC, A = C, D = B

und mithin gehen auch die oben für das Viereck aufgestellten drei Sätze in einen einzigen für das Parallelogramm über, nämlich:

Zwei Parallelogramme sind congruent, wenn beide zwei Seiten nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel bezüglich gleich haben.

Die Zusätze 1, 2, 3. aber in folgendem Satz:

Zwei Parallelogramme sind congruent, wenn beide zwei zusammenstoßende Seiten und die dazu gehörige Diagonale bezüglich gleich haben.

Zusatz 6 Durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel ist daher ein Parallelogramm vollkommen bestimmt und man kann mit diesen drei Bestimmungsstücken nur ein Parallelogramm zeichnen, welches gleichwohl verschiedene Lagen haben kann.

Zusatz 7. Das Quadrat ist daher durch eine Seite vollkommen bestimmt, oder über eine gegebene Linie läßt sich nur ein Quadrat construiren. Deshalb bezeichnet man auch das über eine gegebene Linie AB construirte Quadrat durch AB□.

Zusatz 8. Das Rechteck ist vollkommen bestimmt, wenn zwei zusammenstoßende Seiten desselben gegeben sind, oder mit diesen zwei Bestimmungsstücken läßt sich nur ein Rechteck construiren. Man nennt daher auch das Rechteck EFGH (Fig. 107.), dessen zwei zusammenstoßende Seiten EF, EH sind, das Rechteck aus den zwei Seiten EF und EH.

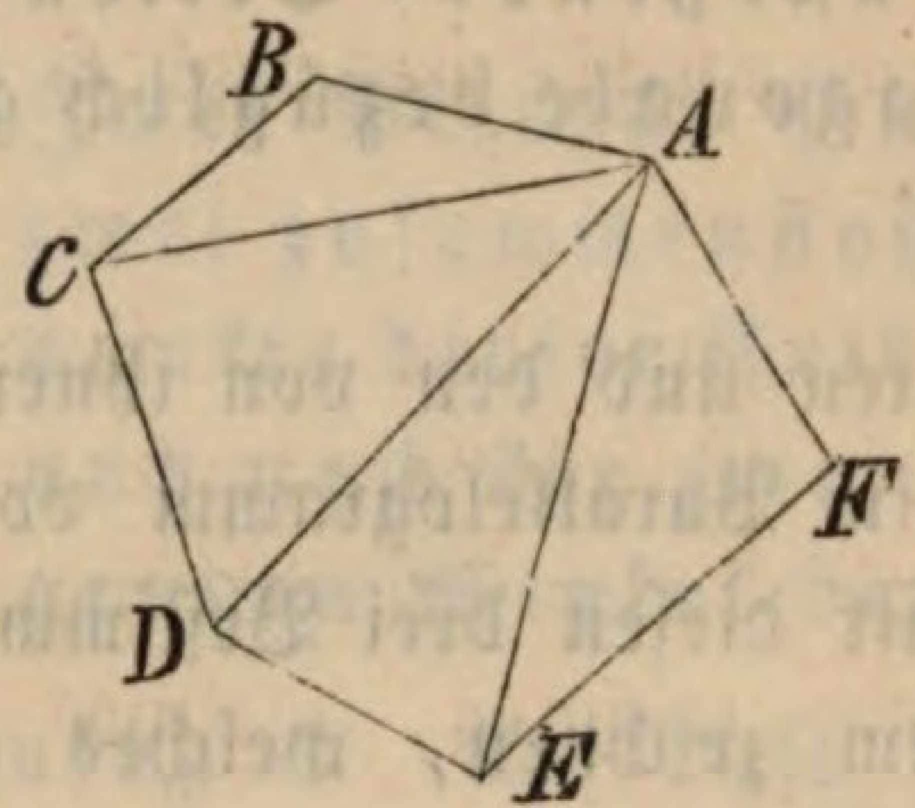
Zusatz 9. Der Rhombus ist durch eine gegebene Seite und einen gegebenen Winkel, sowie das Rhomboid durch zwei gegebene Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel völlig bestimmt.

Zusatz 10. Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei congruente, das Trapez und das Trapezoid aber in zwei ungleiche Dreiecke zerlegt.

§. 87.

Lehrsatz. Jedes Vieleck wird durch alle möglichen Diagonalen, welche alle von der Spitze eines Winkels ausgehen, in Dreiecke zerlegt, deren Anzahl um 2 kleiner ist, als das Vieleck Seiten hat; während die Anzahl der möglichen Diagonalen um 3 kleiner ist, als die Anzahl der Seiten der Figur. (Fig. 111.)

Fig. 111.



Beweis. Zieht man in dem Vieleck ABCDEF aus einer Winkelspitze A alle möglichen Diagonalen, AB, AC, AD, AE, so ergibt sich, daß zur Bildung des ersten Dreiecks zwei Seiten der Figur und eine Diagonale, nämlich AF, FE und AE, zur Bildung des zweiten Dreiecks eine Seite der Figur DE und eine Diagonale AD; ferner zur Bildung des dritten Dreiecks eine Seite DC der Figur und eine Diagonale AC ꝛc. und endlich zur Bildung des letzten Dreiecks nur noch zwei Seiten erforderlich sind. Man braucht daher zur Bildung des ersten und letzten Dreiecks vier Seiten der Figur, während alle dazwischenliegenden Dreiecke nur eine Seite der Figur erfordern, folglich erhält man zwei Dreiecke weniger, als die Figur Seiten hat.

Ferner ist zur Bildung aller ersten Dreiecke eine Diagonale, zur Bildung des letzten Dreiecks keine nothwendig; daher ist die Anzahl der Diagonalen um eins kleiner, als die Anzahl der Dreiecke, oder die Anzahl der Dreiecke um 3 kleiner als die Anzahl der Seiten des Vielecks.

Zusatz 1. Setzt man die Anzahl der Seiten des Vielecks $= n$ (welches Vieleck man überhaupt nEck heißt), so ist die Anzahl der Dreiecke, die von einer Winkelspitze aus durch Diagonalen gebildet werden können $= n - 2$.

Zusatz 2. Nun läßt sich leicht eine Formel angeben, die die Summe der Winkel in einem jeden nEck ausdrückt.

Nämlich jedes n Eck hat n — 2 Dreiecke; die Summe der Winkel eines Dreiecks = 2R; folglich die Summe aller Winkel in einem n Eck = (n — 2) 2R = 2nR — 4R, d. h. die Summe aller Winkel in einem Vielecke hat doppelt so viele Rechte, als die Figur Seiten hat, weniger vier Rechte.

Nach dieser Formel ist die Summe der Winkel in einem

Dreieck	$= 2 . 3R - 4R = 2R$
Viereck	$= 2 . 4R - 4R = 4R$
Fünfeck	$= 2 . 5R - 4R = 6R$
Sechseck	$= 2 . 6R - 4R = 8R$
n Eck	$= 2nR - 4R.$

Zusatz 3. Verlängert man die Seiten eines Vielecks, welches lauter hohle Winkel hat, so ist die Summe aller dadurch entstandenen äußern Winkel = 4R.

Denn jeder dieser äußern Winkel ist mit seinem innern Nebenwinkel = 2R; also alle äußern Winkel mit ihren innern Nebenwinkeln = doppelt so vielen Rechten, als die Figur Seiten hat, mithin = 2nR. Nun ist aber die Summe aller innern Winkel = 2nR — 4R, folglich die Summe aller äußern Winkel $= 2nR - (2nR - 4R) = 4R$.

Zusatz 4. Wenn man von einem beliebigen Punkt J innerhalb der Fläche eines n Ecks in alle Winkelspitzen desselben gerade Linien zieht, so wird dadurch das n Eck in gerade so viele Dreiecke zerlegt, als es Seiten hat, nämlich in n Dreiecke. Jedes dieser Dreiecke enthält 2R, folglich die n Dreiecke 2nR; da aber die Winkel um J herum, welche gleich 4R (nach §. 7. Z. 2.) sind, nicht mit zu den Winkeln des n Ecks gehören, so ist folglich die Summe aller Winkel dieses n Ecks = 2nR — 4R; wie oben.

Zusatz 5. Ist das n Eck regelmäßig, sind also die Winkel alle einander gleich, so läßt sich nun leicht die Größe eines einzelnen (Polygon-) Winkels finden. Da die Summe aller Winkel eines n Ecks = 2nR — 4R und jedes n Eck auch n Winkel hat, so ist der einzelne Polygon-Winkel eines jeden regelmäßigen Vielecks $= \frac{2nR - 4R}{n} = 2R - \frac{4R.}{n}$

Aus dieser Formel gibt sich zu erkennen, daß der Polygonwinkel eines regelmäßigen Vielecks nie gleich 2R und auch nie größer als 2R seyn kann.

Um nun die Größe des einzelnen Polygonwinkels zu bestimmen, setze man n = 3, n = 4, n = 5, n = 6, n = 7 ꝛc., nämlich man erhält für den Polygonwinkel

des regelmäßigen Dreiecks $\frac{2 . 3R - 4R}{3} = {}^{2}/_{3}R.$

» » Vierecks $\frac{2 . 4R - 4R}{4} = R.$

» » Fünfecks $\frac{2 . 5R - 4R}{5} = {}^{6}/_{5}R.$

» » Sechsecks $\frac{2 . 6R - 4R}{6} = {}^{3}/_{4}R.$

» » Siebenecks $\frac{2 . 7R - 4R}{7} = {}^{10}/_{7}R.$

u. s. w.

Zusatz 6. Um die Anzahl aller Diagonalen eines nEcks, nämlich aller möglichen Diagonalen, die aus allen Winkelspitzen gezogen werden können, zu bestimmen, überlege man, daß von jeder Winkelspitze n — 3 Diagonalen möglich sind, folglich hätte man von n Winkelspitzen n (n—3) Diagonalen. Bei dieser Betrachtung kommt aber jede Diagonale zweimal vor; folglich ist die wirkliche Anzahl der Diagonalen in jedem nEck $= \frac{n (n-3)}{2}$.

Daher sind im Viereck $\frac{4 (4-3)}{2} = 2$ Diagonalen

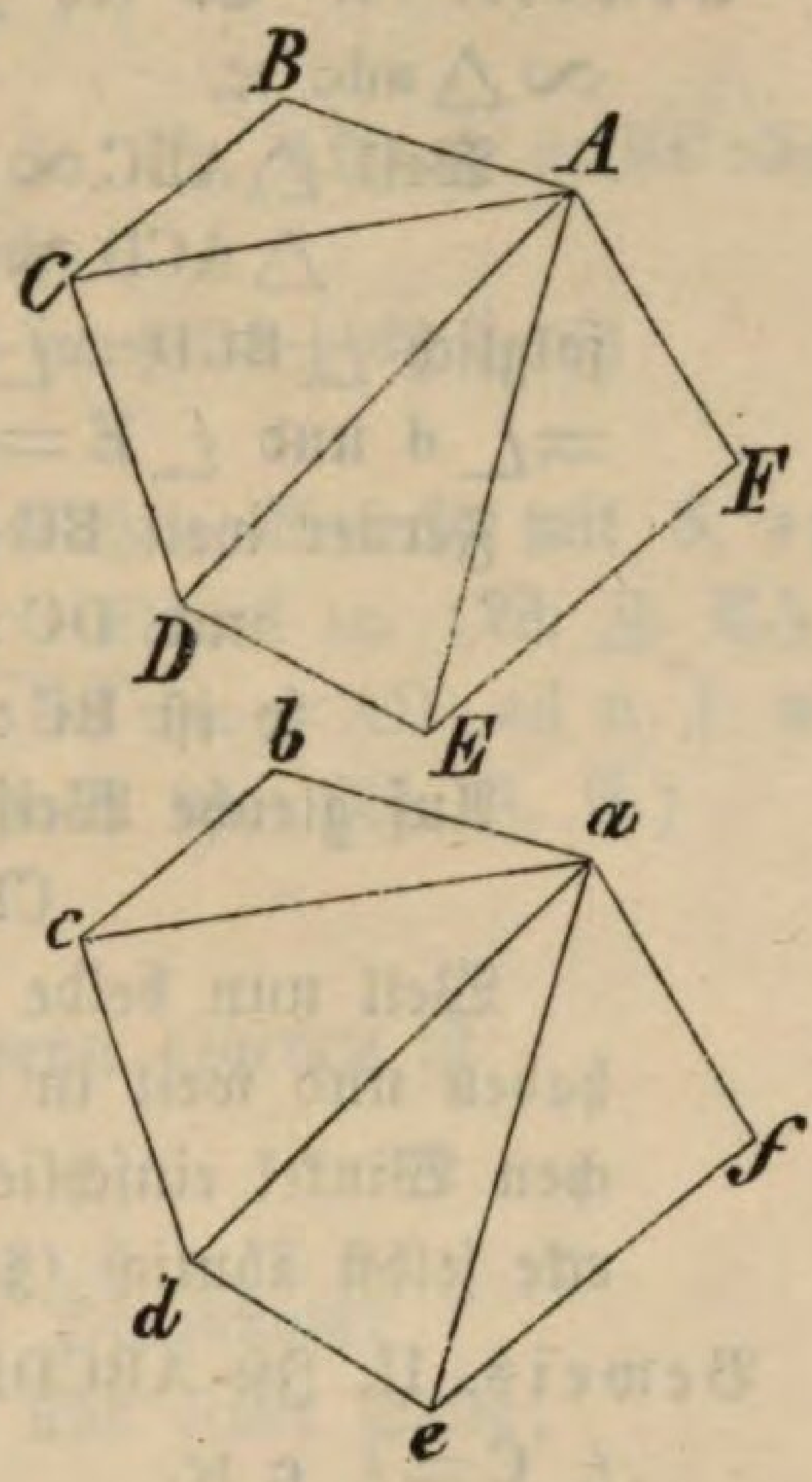
» Fünfeck $\frac{5 (5-3)}{2} = 5$ Diagonalen

» Sechseck $\frac{6 (6-3)}{2} = 9$ Diagonalen u. s. w. möglich.

§. 88.

Lehrsatz. Wenn man zwei Vielecke von einer gleichen Anzahl Seiten durch Diagonalen von der Spitze eines Winkels aus in Dreiecke

Fig. 111. a.



zerlegen kann, welche der Ordnung nach einander congruent sind, so sind die beiden Vielecke congruent. (Fig. 111. a.)

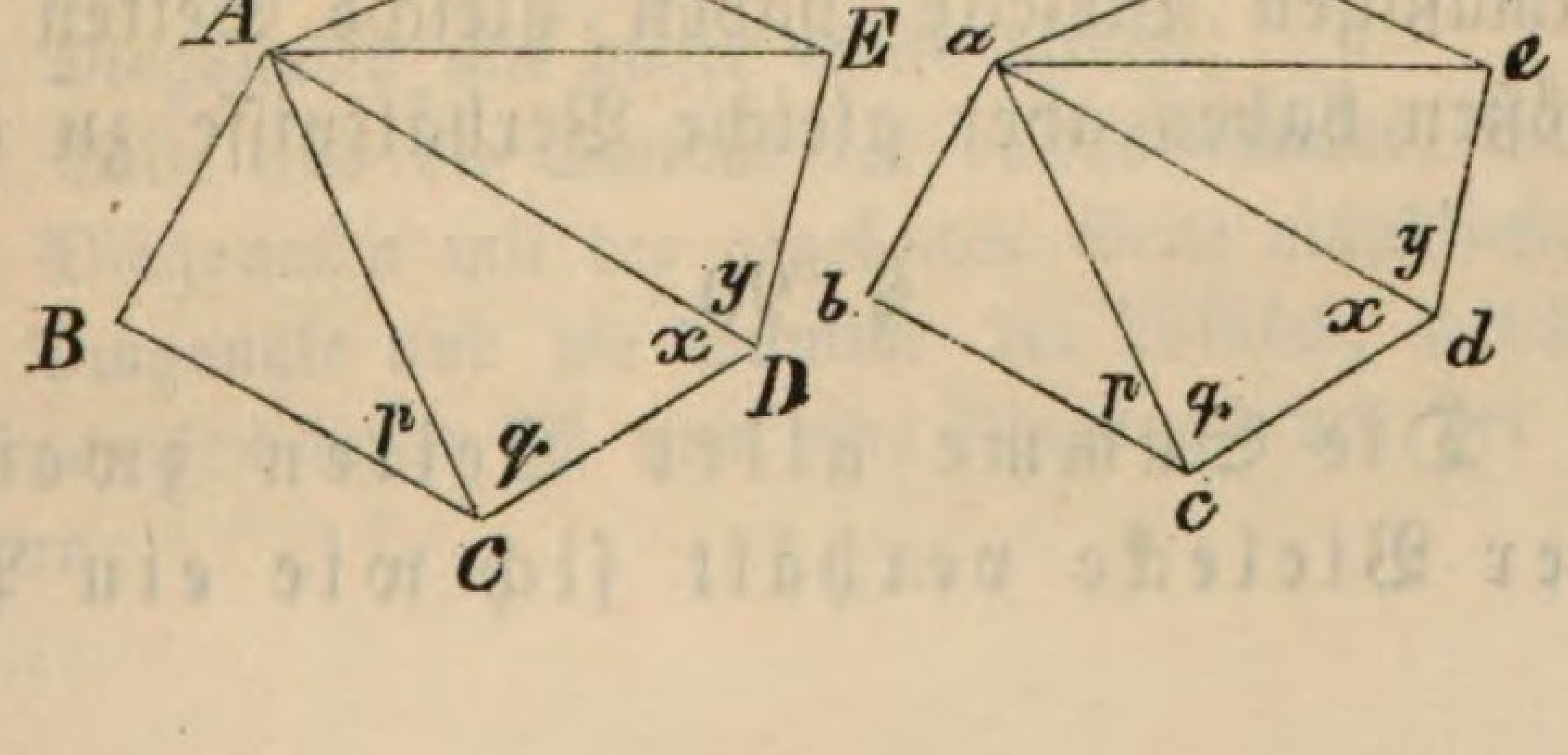
Beweis. Es seyen die beiden Vielecke ABCDEF und abcdef durch die Diagonalen AC, AD, AE und ac, ad, ae so zerlegt, daß $\triangle ABC \cong \triangle abc$, $\triangle ACD \cong \triangle acd$, $\triangle ADE \cong \triangle ade$, so ist sich leicht zu überzeugen, daß, weil die einzelnen Dreiecke der Ordnung nach sich decken, ebenfalls die beiden Vielecke, gehören auf einander gelegt, sich decken müssen.

§. 89.

Lehrsatz. I. Wenn man zwei Vielecke von einer gleichen Anzahl Seiten durch Diagonalen in Dreiecke zerlegen kann, die der Ordnung nach einander ähnlich sind, so sind die beiden Vielecke selbst einander ähnlich.

II. Zwei ähnliche Vielecke lassen sich durch homologe Diagonalen in Dreiecke zerlegen, die der Ordnung nach einander ähnlich sind. (Fig. 111. b.)

Fig. 111. b.



Beweis. I. Es sey $\triangle ABC \sim \triangle abc$, $\triangle ACD \sim \triangle acd$, $\triangle ADE \sim \triangle ade$ ꝛc.

Weil $\triangle ABC \sim \triangle abc$, so $\angle p = \angle p$ und weil
$\triangle ACD \sim \triangle acd$, so $\angle q = \angle q$
folglich $\angle BCD = \angle bcd$. Ebenso läßt sich erweisen, daß $\angle D = \angle d$ und $\angle E = \angle e$ ist u. s. w.

Ferner weil $BC : AC = bc : ac$
und $DC : AC = dc : ac$
so ist $BC : DC = bc : dc$.

Auf gleiche Weise läßt sich erweisen, daß auch Statt findet:
$CD : DE = cd : de$ ꝛc.

Weil nun beide Vielecke die Winkel der Ordnung nach gleich haben und weil in beiden Vielecken die Seiten, welche die gleichen Winkel einschließen, in Proportion stehen, so sind die Vielecke selbst ähnlich (§. 33.).

Beweis. II. Ist $ABCDEF \sim abcdef$, so ist $\angle A = \angle a$, $\angle B = \angle b$, $\angle C = \angle c$ ꝛc.

Ferner $AB : BC = ab : bc$
$BC : CD = bc : cd$
$CD : DE = cd : de$ u. s. w.

Zieht man die homologen Diagonalen AC, ac, so ist $\triangle ABC \sim \triangle abc$ (§. 67.); mithin $\angle p = \angle p$, und weil $\angle C = \angle c$, so auch $\angle q = \angle q$, und auch

$$\begin{array}{l} BC : AC = bc : ac \\ BC : CD = bc : cd \\ \hline AC : CD = ac : cd \end{array}$$

folglich $\triangle ACD \sim \triangle acd$ ꝛc. (§. 67.). Auf gleiche Weise wird erwiesen, daß $\triangle ADE \sim \triangle ade$, $\triangle ADF \sim \triangle adf$ ꝛc. ist.

Zusatz 1. In ähnlichen Vielecken sind die homologen Diagonalen den homologen Seiten proportionirt.

Zusatz 2. Regelmäßige Vielecke von einer gleichen Anzahl Seiten sind alle einander ähnlich, denn sie haben gleiche Winkel und die Seiten sind einander proportionirt. (Die regelmäßigen Vielecke haben gleiche Seiten (§. 18.); gleiche Größen haben aber gleiche Verhältnisse zu einander)

§. 90.

Lehrsatz. Die Summe aller Seiten zweier ähnlicher Vielecke verhält sich wie ein Paar ho-

mologer Seiten, oder homologer Diagonalen. (Fig. 111. b.)

Beweis. Es sey ABCDEF ∾ abcdef, so ist AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EF : ef; folglich
(AB + BC + CD + DE + EF) : (ab + bc + cd + de + ef)
= AB : ab = BC : bc = DE : de ꝛc.
Bezeichnet man die Umfänge der ähnlichen Vielecke mit S, s; so ist S : s = AB : ab = BC : bc = CD : cd ꝛc. (W. Z. E.)
da auch nach §. 89. Z. 1. AB : ab = AC : ac = AD : ad u. s. w. so ist auch S : s = AC : ac = AD : ad u. s. w. (W. Z. E.)

§. 91.

Aufgabe. Ein Quadrat zu construiren, wenn gegeben ist:
1) eine Seite;
2) eine Diagonale;
3) die Summe aus einer Seite und der Diagonale;
4) die Differenz zwischen der Diagonale und einer Seite;
5) der Umfang.

§. 92.

Aufgabe. Ein Rechteck zu construiren, wenn gegeben ist:
1) zwei zusammenstoßende Seiten;
2) eine Seite und die Diagonale;
3) eine Seite und die Summe aus der anstoßenden Seite und der Diagonale,
4) eine Seite und die Differenz zwischen der Diagonale und der andern anstoßenden Seite;
5) eine Seite und der Winkel, den die Diagonale mit dieser Seite bildet;
6) die Summe zweier zusammenstoßender Seiten und die Diagonale;
7) die Differenz zweier zusammenstoßender Seiten und die Diagonale;
8) eine Seite und der Winkel, unter welchem sich die Diagonalen schneiden.
9) eine Seite und die Summe der beiden Winkel, welche die beiden Diagonalen mit dieser Seite bilden;
10) eine Seite und die Summe der beiden Winkel, welche die beiden Diagonalen mit der gegebenen Seite einschließen;
11) die Diagonale und die Summe der Winkel, welche die beiden Diagonalen unter sich und eine Diagonale mit der größern Seite bilden;

12) die Diagonale, und die Differenz der beiden Winkel, welche diese Diagonale mit zweien Seiten bildet;
13) die Differenz der Seiten und die Differenz der beiden Winkel, welche von diesen Seiten mit einer Diagonale gebildet werden;
14) die Summe aus der Diagonale und einer Seite, und der Winkel, den diese beiden Linien einschließen;

§. 93.

Aufgabe. Einen Rhombus zu construiren, wenn gegeben ist:
1) eine Seite und der anliegende Winkel;
2) eine Seite und eine Diagonale;
3) die Summe aus der Diagonale und einer Seite und der Winkel, welcher der Diagonale gegenüberliegt;
4) die Differenz zwischen der Diagonale und einer Seite und der Winkel, durch welchen die Diagonale geht;
5) die Summe der beiden Diagonalen und eine Seite;
6) die Summe der beiden Diagonalen und ein Winkel;
7) die Differenz der beiden Diagonalen und eine Seite;
8) die Differenz der beiden Diagonalen und ein Winkel;
9) die Summe der beiden Diagonalen und ihre Differenz;
10) die Summe und Differenz einer Diagonale und einer Seite;
11) eine Seite und die Höhe auf dieser Seite;
12) die Summe aus einer Seite und der Höhe und ein Winkel;
13) die Summe aus einer Seite und der Diagonale, welche durch den spitzen Winkel geht, und ein stumpfer Winkel;
14) eine Seite und die Differenz zwischen einem stumpfen und einem spitzen Winkel;
15) die Diagonale und eine Höhe;
16) die Diagonale, und der Winkel, durch den sie nicht geht;
17) die Summe der beiden Diagonalen und die Differenz der beiden Winkel, welche die Diagonalen mit einer Seite einschließen;
18) die Differenz der beiden Diagonalen und die Differenz zwischen einem stumpfen und einem spitzen Winkel.

§. 94.

Aufgabe. Ein Rhomboid zu construiren, wenn gegeben ist:
1) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel;
2) eine Seite, eine Diagonale und der von diesen eingeschlossene Winkel;
3) die Diagonale und zwei zusammenstoßende Seiten;
4) die Summe zweier Seiten, der von diesen eingeschlossene Winkel und die Diagonale, die durch diesen Winkel geht;

5) die Summe zweier Seiten, der von diesen eingeschlossene Winkel und die Diagonale, die durch diesen Winkel nicht geht;
6) die Differenz zweier Seiten, der von diesen eingeschlossene Winkel und die Diagonale, die durch diesen Winkel geht;
7) eine Seite und die beiden Diagonalen;
8) eine Seite, die Summe der beiden Diagonalen und der Winkel, den diese einschließen;
9) eine Seite, die Differenz der beiden Diagonalen und der Winkel, den diese bilden;
10) die beiden Diagonalen und der Winkel, unter welchem sie sich schneiden;
11) eine Seite und die Winkel, welche die beiden Diagonalen mit dieser bilden;
12) eine Seite, die ihr zugehörige Höhe und eine Diagonale;
13) eine Seite, die ihr zugehörige Höhe und ein Winkel;
14) eine Seite, die Höhe auf die anstoßende Seite und eine Diagonale;
15) beide Höhen und eine Diagonale.

§. 95.

Aufgabe. Ein Viereck zu construiren, wenn gegeben ist:

1) vier Seiten in bestimmter Ordnung und ein Winkel zwischen bestimmten Seiten;
2) drei Seiten, ein eingeschlossener und ein anliegender Winkel, mit Bestimmung der Ordnung dieser Stücke;
3) zwei Seiten und die diesen Seiten anliegenden drei Winkel, mit Bestimmung der Ordnung dieser Stücke;
4) vier Seiten und eine Diagonale, m. B. d. O. d. St.
5) drei Seiten und zwei Diagonalen, m. B. d. O. d. St.
6) zwei zusammenstoßende Seiten, die dazu gehörige Diagonale, nebst den zwei Winkeln, durch die diese Diagonale geht, m. B. d. O. d. St.
7) zwei zusammenstoßende Seiten, die dazu gehörige Diagonale, ein Winkel, durch welchen die Diagonale geht und noch eine Seite, m. B. d. O. d. St.
8) zwei zusammenstoßende Seiten, die zwei Diagonalen und der Winkel, unter welchem sie sich schneiden, m. B. d. O. d. St.
9) zwei zusammenstoßende Seiten, zwei Diagonalen und der Winkel, den die dritte Seite mit der größern Diagonale macht, m. B. d. O. d. St.
10) die vier Abschnitte der Diagonalen und der Winkel, unter welchem sie sich schneiden, m. B. d. O. d. St.

11) drei Seiten und die zwei Winkel, welche der vierten unbekannten Seiten anliegen, m. B. d. O. d. St.
12) eine Diagonale, eine Seite und drei Winkel, m. B. d. O. d. St.
13) zwei Seiten und drei Winkel, m. B. d. O. d. St.

§. 96.

Aufgabe. Ein Fünfeck zu construiren, wenn gegeben ist:

1) fünf Seiten und zwei Winkel, mit Bestimmung der Ordnung dieser Stücke;
2) fünf Seiten und zwei Diagonalen aus einer gegebenen Winkelspitze, m. B. d. O. d. St.
3) vier Seiten und die drei Winkel, die diese einschließen, m. B. d. O. d. St.
4) vier Seiten, die beiden Diagonalen, die aus dem einen Endpunkt der unbekannten fünften Seite gezogen sind, nebst dem Winkel, der dem andern Endpunkt der unbekannten Seite anliegt, m. B. d. O. d. St.
5) die erste, zweite, dritte Seite, die beiden Diagonalen, die aus den Endpunkten der zweiten Seite an die Endpunkte der ersten und dritten Seite gezogen sind und die zwei Winkel, welche die Diagonalen mit den unbekannten Seiten bilden, m. B. d. O. d. St.

§. 97.

Aufgabe. Ein Sechseck zu construiren, wenn gegeben ist:

1) die sechs Seiten der Ordnung nach und drei Diagonalen, welche der Ordnung nach aus einer gegebenen Winkelspitze gezogen sind;
2) fünf Seiten der Ordnung nach, und die vier Winkel der Ordnung nach, die diese einschließen;
3) vier Seiten und die drei Winkel, welche sie einschließen, und die beiden Diagonalen, welche von dem Durchschnittspunkt der beiden unbekannten Seiten in die Spitzen der beiden Winkel gezogen sind, welche von der ersten und zweiten, so wie von der dritten und vierten Seite gebildet sind, mit Bestimmung der Ordnung dieser Stücke.

§. 98.

Aufgabe. Ueber einer gegebenen Geraden ein Vieleck, z. B. ein Siebeneck, zu construiren, das einem gegebenen ähnlich ist.

Vierter Abschnitt.

Der Flächenraum geradliniger Figuren.

A. Bestimmung und Vergleichung des Flächenraums.

§. 99.

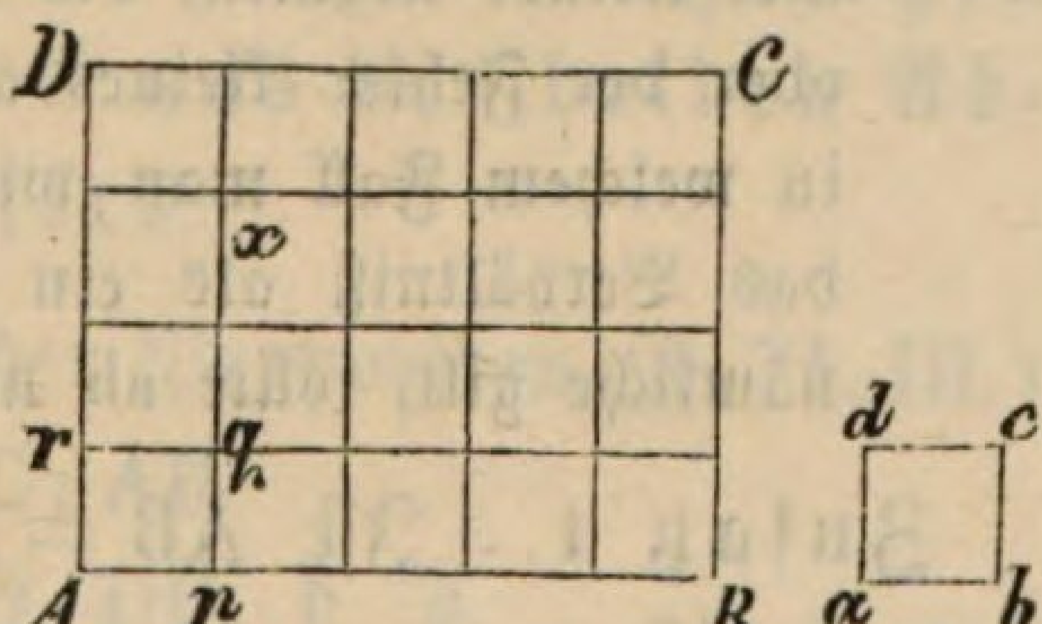
Erklärung. Man bestimmt den Flächenraum einer geradlinigen Figur, indem man untersucht, wie oft eine als Einheit angenommene Fläche in demselben enthalten ist.

Diese als Einheit angenommene Fläche ist ein Quadrat und heißt, je nachdem die Seite desselben eine Linie, ein Zoll, ein Fuß, eine Ruthe ist: Quadratlinie, Quadratzoll, Quadratfuß, Quadratruthe.

§. 100.

Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie in die Höhe desselben, wobei aber immer zugleich diesem Produkte die quadratische Einheit zukommt, welche durch die lineare Einheit, mit der die Grundlinie und Höhe gemessen wurde, bestimmt ist. (Fig. 112.)

Fig. 112.



Beweis. Es sei ABCD ein Rechteck und abcd ein Quadrat von der Beschaffenheit, daß ab in AB m (5)mal und in AD n (4)mal enthalten ist. Trägt man nun ab auf AB m (5)mal und auf AD n (4)mal ab, zieht durch die Theilungspunkte Parallelen

zu den Seiten des Rechtecks, so wird dieses in eine gewisse Anzahl kleiner Flächen zerlegt, welche

1) Quadrate sind, und

2) deren jede gleich dem Quadrate abcd ist.

Denn betrachtet man eine von diesen Flächen, etwa Apqr, so siehet man, daß, weil Ap || qr und pq || Ar ist, Apqr ein Parallelogramm (§. 84. Z. 2.) und weil ∠ A = R, Ar = Ap = ab ist, ist Apqr ein Quadrat und zwar = abcd.

Nun hat jede dieser kleinen Quadratflächen, z. B. x, dieselben Eigenschaften, folglich ist jede dem Quadrat abcd gleich und mithin sind auch alle diese kleinen Quadrate einander gleich.

Auf der Grundlinie AB liegen aber m (5) solcher gleicher Quadrate nebeneinander, welche wir eine Schichte nennen wollen und weil AD = n (4) mal ab, so enthält das Rechteck ABCD n (4) solcher Schichten, nämlich

$$ABCD = m.n.Apqr = m.n.abcd = 5.4.abcd$$

Setzt man die Seite des für die Einheit angenommenen Quadrats = s, nämlich ab = s, so ist $m = \frac{AB}{s}$ und $n = \frac{AD}{s}$, folglich wird

$$ABCD = \frac{AB}{s} \cdot \frac{AD}{s} \cdot abcd$$

Wird nun s als 1 angenommen, etwa s = 1 Zoll, so ist abcd = 1 Quadratzoll, daher

$$ABCD = AB.AD \text{ Quadratzoll.}$$

Wäre aber, gegen die oben angenommene Voraussetzung, ab und AB nicht commensurabel, so tritt der in §. 32. besprochene Fall hier wieder ein und man müßte sodann ab immer kleiner nehmen, bis entweder das Verhältniß commensurabel, oder der Fehler kleiner als jede angebliche endliche Größe wird, in welchem Fall man wieder, ohne einen Irrthum zu begehen, das Verhältniß als ein commensurables ansehen kann. Das nämliche gilt, sollte ab und AD incommensurabel seyn.

Zusatz 1. Ist AB = AD, d. h. ist ABCD ein Quadrat, so ist

$$ABCD = AB.AB = AD.AD, \text{ d. h.}$$

der Flächeninhalt eines Quadrats ist gleich dem Produkt einer Seite in die Seite selbst.

Zusatz 2. Bezeichnen a, b Linien, so drückt das Produkt ab den Flächeninhalt eines Rechtecks aus, dessen eine

Seite a und die andere Seite (welche beim Rechteck mit der Höhe identisch ist) b vorstellt und das Produkt aa bezeichnet den Flächeninhalt eines Quadrats, dessen eine Seite = a ist.

Wir werden künftighin aa durch a^2 und also auch AB . AB durch AB^2 bezeichnen und die Bedeutung dieser Bezeichnung aus der Arithmetik entlehnen.

Zusatz 3. Die Proportion des §. 71. II.

$$AD : DC = DC : DB$$

in eine Gleichung verwandelt, gibt

$$DC^2 = AD . DB$$

welche nun also heißt:

Im rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat der Senkrechten von der Spitze des rechten Winkels auf die gegenüberliegende Hypotenuse gefällt gleich dem Rechteck aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Oder, wenn man um das rechtwinkelige Dreieck einen Kreis beschreibt, geht der Satz (§. 71. Z. II.) über in folgenden:

Das Quadrat der Senkrechten, die in irgend einem Punkt des Durchmessers errichtet und bis an die Peripherie des Kreises gezogen ist, ist gleich dem Rechteck aus den beiden Abschnitten des Durchmessers.

Zusatz 4. Ferner wird aus der Proportion (§. 71. III.)

$$AD : AC = AC : AB$$

die Gleichung $AC^2 = AD . DB$, d. h.

Im rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathete gleich dem Rechteck aus dem anliegenden Abschnitt und der Hypotenuse.

Der Satz (§. 71. III.) aber kann jetzt auch so ausgedrückt werden:

Im Kreis ist das Quadrat der Sehne gleich dem Rechteck aus dem anliegenden Abschnitt und dem Durchmesser.

Anmerkung 1. Ist AB die Seite eines Quadrats = 1 Fuß und theilt man diese in 10 gleiche Theile (Zolle), eben so die anstoßende Seite AD und zieht durch die Theilungspunkte Parallelen, so ist das Quadrat ABCD in 100 gleiche Quadrate getheilt, deren jedes = 1 Quadratzoll, nämlich

ABCD = 1 Quadratfuß = 100 Quadratzoll

und ebenso, wäre AB = 1 Zoll, so wäre ABCD = 1 Quadratzoll = 100 Quadratlinien.

Es ist daher

1 Quadratfuß = 100 Quadratzoll = 10000 Quadratlinien, nach der Decimaleintheilung, und

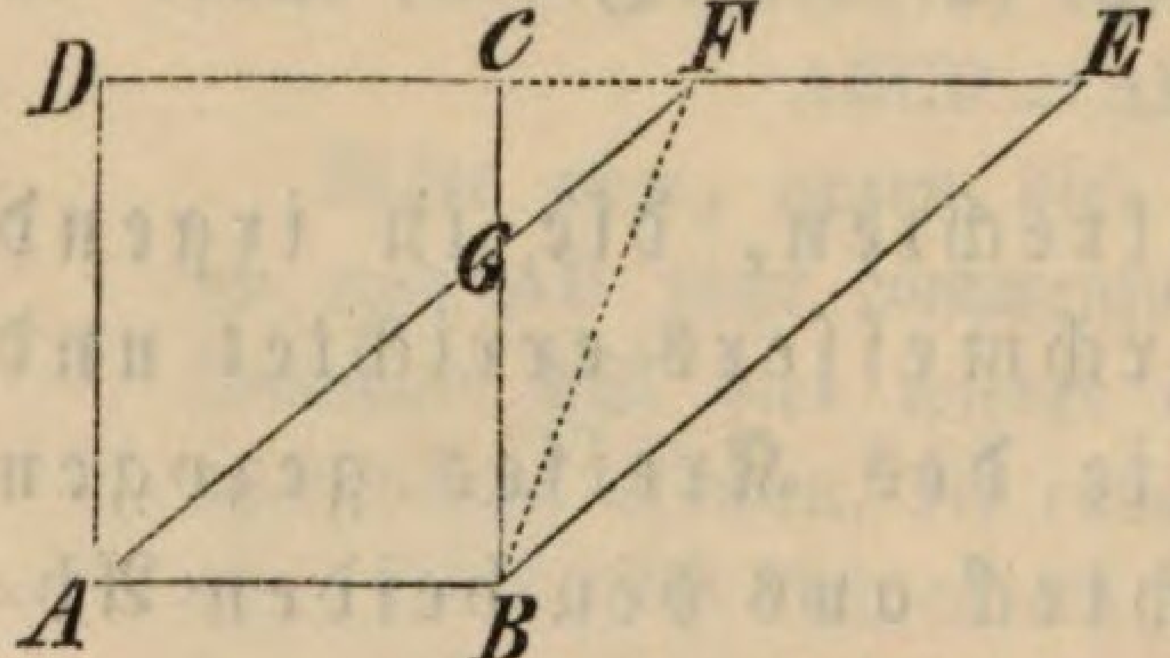
1 Quadratfuß = 144 Quadratzoll = 20736 Quadratlinien, nach der Duodecimaleintheilung.

Anmerkung 2. Wir werden 20 Quadratfuß 60 Quadratzoll 48 Quadratlinien also bezeichnen: $20\square' \; 60\square'' \; 48\square'''$.

§. 101.

Lehrsatz. Der Flächenraum eines jeden Parallelogramms ist gleich dem eines Rechtecks, das mit diesem einerlei Grundlinie hat und zwischen denselben Parallelen liegt. (Fig. 113.)

Fig. 113.



Beweis. Es sei ABCD ein Rechteck, ABEF ein Parallelogramm; beide Figuren haben dieselbe Grundlinie AB und FE liege in der Verlängerung von DC, also AB || DE, so ist (§. 47. Z. 2.)

$$\triangle ADF \cong \triangle BCE.$$

Subtrahirt man von jedem dieser beiden gleichen Dreiecke das Dreieck CGF und addirt sodann zu diesen gleichen Resten das Dreieck AGB, nämlich

$$\triangle ADE - \triangle CGF + \triangle AGB = \triangle BCE - \triangle CGF + \triangle AGB$$

so erhält man

Rechteck ABCD = Parallelogramm ABEF.

(W. Z. E.)

Ganz ähnlich ist der Beweis, wenn das Parallelogramm ABEF so liegt, daß AF zugleich die Diagonale des Parallelogramms ABCD ist, oder wenn der Punkt F der Seite EF zwischen C und D fällt.

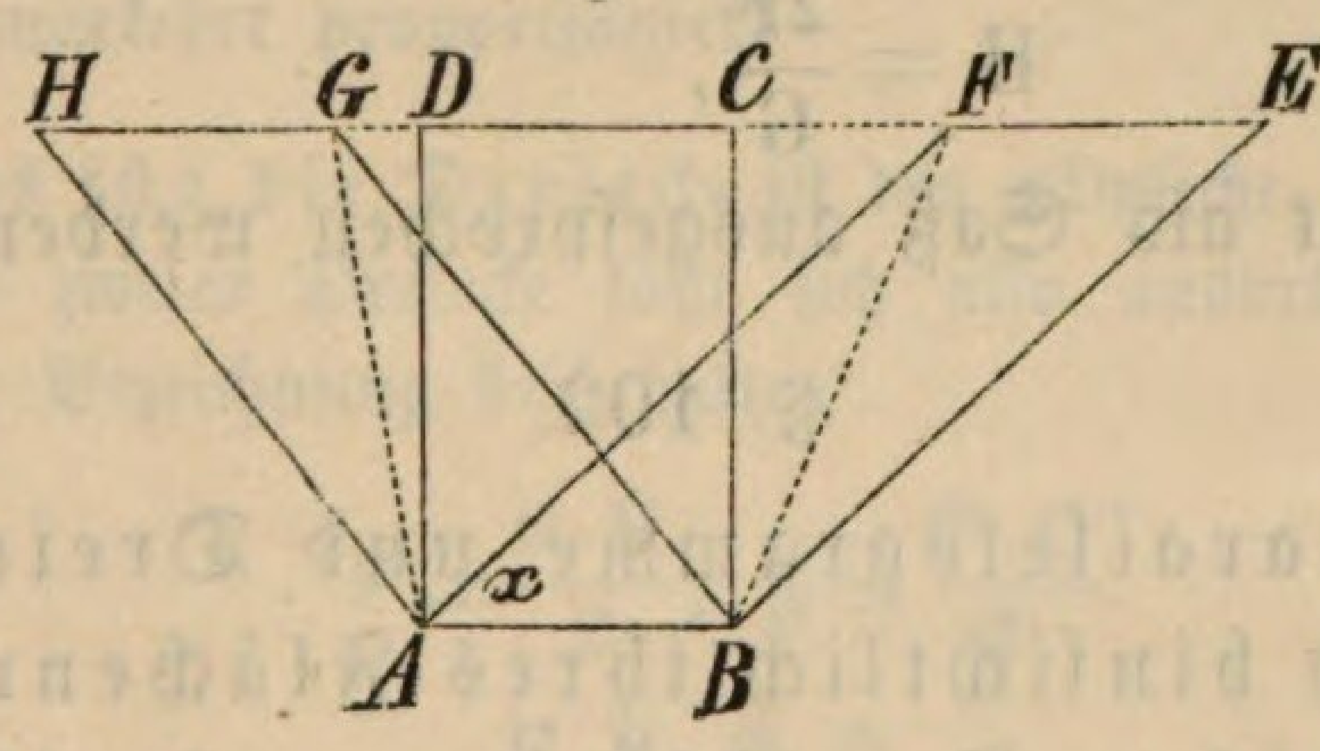
Zusatz 1. Parallelogramme und Rechtecke sind am Flächenraum einander gleich, wenn sie gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben.

Zusatz 2. Also ist der Flächenraum eines Parallelogramms gleich dem Produkt aus seiner Grundlinie in seine Höhe.

Zusatz 3. Zieht man (Fig. 113.) BF, so ist $\triangle$ ABF $= \frac{1}{2}$ABEF $= \frac{1}{2}$ABCD $= \frac{1}{2}$AB . AD (§. 84. Z. 4.), d. h.

Der Flächenraum eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus seiner Grundlinie in die Höhe desselben und mithin ist der Flächenraum eines Dreiecks gleich der Hälfte des Flächenraumes eines Parallelogramms, das mit dem Dreieck gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat (oder zwischen denselben Parallelen liegt).

Fig. 114.



Zusatz 4. Weil (Fig. 114.), wenn HE || AB,

Parallelogramm ABGH = Rechteck ABCD, und
Parallelogramm ABEF = Rechteck ABCD

so ist Parallelogramm ABGH = Parallelogr. ABEF, und, wenn man BF und AG zieht, auch

$\triangle$ ABG = $\triangle$ ABF ist, so folgt, daß

Parallelogramme, so wie Dreiecke, die gleiche Grundlinien haben und zwischen Parallelen liegen (also gleiche Höhen haben), am Flächenraume einander gleich sind; daher ist die zu AB parallele HE der geometrische Ort für die Spitzen aller derjenigen Dreiecke, die AB zur Grundlinie haben und am Flächenraum einander gleich sind.

Zusatz 5. Bezeichnet F den Flächenraum, G die Grundlinie und H die Höhe irgend eines Parallelogramms, so ist

$$F = G \,.\, H$$

$$\text{Also } G = \frac{F}{H} \text{ und } H = \frac{F}{G}, \text{ d. h.}$$

Man findet die Grundlinie eines Parallelogramms, wenn man den Flächenraum durch seine Höhe dividirt, und die Höhe wird gefunden, wenn man den Flächenraum durch die Grundlinie dividirt.

Zusatz 6. Sind F, G, H, der Flächenraum, die Grundlinie und Höhe eines Dreiecks, so ist

$$F = \frac{G \,.\, H}{2}, \text{ daraus}$$

$$G = \frac{2F}{H} \text{ und}$$

$$H = \frac{2F}{G},$$

was nun leicht als Satz ausgesprochen werden kann.

§. 102.

Lehrsatz. Parallelogramme und Dreiecke verhalten sich hinsichtlich ihres Flächenraumes

I. bei gleichen Grundlinien, wie ihre Höhen, und

II. bei gleichen Höhen, wie ihre Grundlinien;

III. die Flächenräume selbst, wie die Produkte aus den Grundlinien in die Höhen, und

IV. bei gleichen Flächenräumen sind die Grundlinien ihren Höhen umgekehrt proportionirt.

Beweis für die Parallelogramme. Bezeichnet man den Flächeninhalt eines Parallelogramms mit F, dessen Grundlinie mit G und dessen Höhe mit H, so wie den Flächeninhalt eines andern Parallelogramms mit $\mathfrak{F}$, die Grundlinie mit $\mathfrak{G}$ und die Höhe desselben mit $\mathfrak{H}$; so ist nach §. 101. Z. 2.

$$F = G \,.\, H, \text{ und ebenso}$$
$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G} \,.\, \mathfrak{H}, \text{ folglich ist}$$
$$\text{III. } F : \mathfrak{F} = G \,.\, H : \mathfrak{G} \,.\, \mathfrak{H}, \text{ d. h.}$$

die Flächenräume verhalten sich wie die Produkte aus den Grundlinien in ihre Höhen.

Aus $F : \mathfrak{F} = G \,.\, H : \mathfrak{G} \,.\, \mathfrak{H}$ folgt,
wenn $G = \mathfrak{G}$,
I. daß $F : \mathfrak{F} = H : \mathfrak{H}$, d. h.

die Flächenräume verhalten sich, bei gleichen Grundlinien, wie ihre Höhen.

Ist $H = \mathfrak{H}$, so geht die Proportion
$F : \mathfrak{F} = G \,.\, H : \mathfrak{G} \,.\, \mathfrak{H}$, über in
II. $F : \mathfrak{F} = G : \mathfrak{G}$, d. h.

die Flächenräume verhalten sich, bei gleichen Höhen, wie ihre Grundlinien.

Wird $F = \mathfrak{F}$, so wird auch $G \,.\, H = \mathfrak{G} \,.\, \mathfrak{H}$, oder
IV. $G : \mathfrak{G} = \mathfrak{H} : H$, d. h.

bei gleichen Flächenräumen verhalten sich die Grundlinien ihren Höhen umgekehrt proportionirt.

Der Beweis für die Dreiecke ist der nämliche. Denn der Flächenraum zweier Dreiecke läßt sich also ausdrücken, wenn wir die obige Bezeichnung beibehalten:

$$F = \frac{G \,.\, H}{2}; \quad \mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{G} \,.\, \mathfrak{H}}{2}$$

$$\text{Nun ist } F : \mathfrak{F} = \frac{G \,.\, H}{2} \,.\, \frac{\mathfrak{G} \,.\, \mathfrak{H}}{2} = G \,.\, H : \mathfrak{G} \,.\, \mathfrak{H}$$

Wird $G = \mathfrak{G}$, so ist
$F : \mathfrak{F} = H : \mathfrak{H}$, und
wird $H = \mathfrak{H}$, so ist
$F : \mathfrak{F} = G : \mathfrak{G}$ u. s. w.

Es versteht sich ohne Erinnern, daß diese Sätze auch für das Rechteck gelten.

§. 103.

Lehrsatz. Haben zwei Dreiecke einen Winkel gleich, so verhalten sich die Flächenräume dieser Dreiecke, wie die Produkte aus den Seiten, welche die gleichen Winkel einschließen. (Fig. 62.)

Beweis. In den Dreiecken ABC, abc, sei $\angle ABC = \angle abc$; man ziehe die Senkrechten AD und ad, so ist

$$\triangle ABC : \triangle abc = AD . BC : ad . bc \text{ (§. 102. III.)}$$

ferner $AB : ab = AD : ad$ (weil $\triangle ABD \backsim \triangle abd$);

dividirt man die erste Proportion durch die zweite,

so ist $\frac{\triangle ABC}{AB} \cdot \frac{\triangle abc}{ab} = BC : bc$

daher $\triangle ABC : \triangle abc = AB . BC : ab . bc$. (W. Z. E.)

§. 104.

Lehrsatz. Die Flächenräume ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten, oder auch wie die Quadrate homologer Höhen. (Fig. 62.)

Beweis. Es sey $\triangle ABC \backsim \triangle abc$; ferner $AD \perp BC$ und $ad \perp bc$, so ist

$$\triangle ABC : \triangle abc = BC . AD : bc . ad \text{ (§. 102.)}$$

Es ist aber auch $BC : bc = AD : ad$

folglich $\frac{\triangle ABC}{BC} \cdot \frac{\triangle abc}{bc} = BC : bc$

oder $\triangle ABC : \triangle abc = BC^2 : bc^2$.

Weil aber $BC : bc = AC : ac = AB : ab = AD = ad$ oder $BC^2 : bc^2 = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2$ Statt findet, so ist

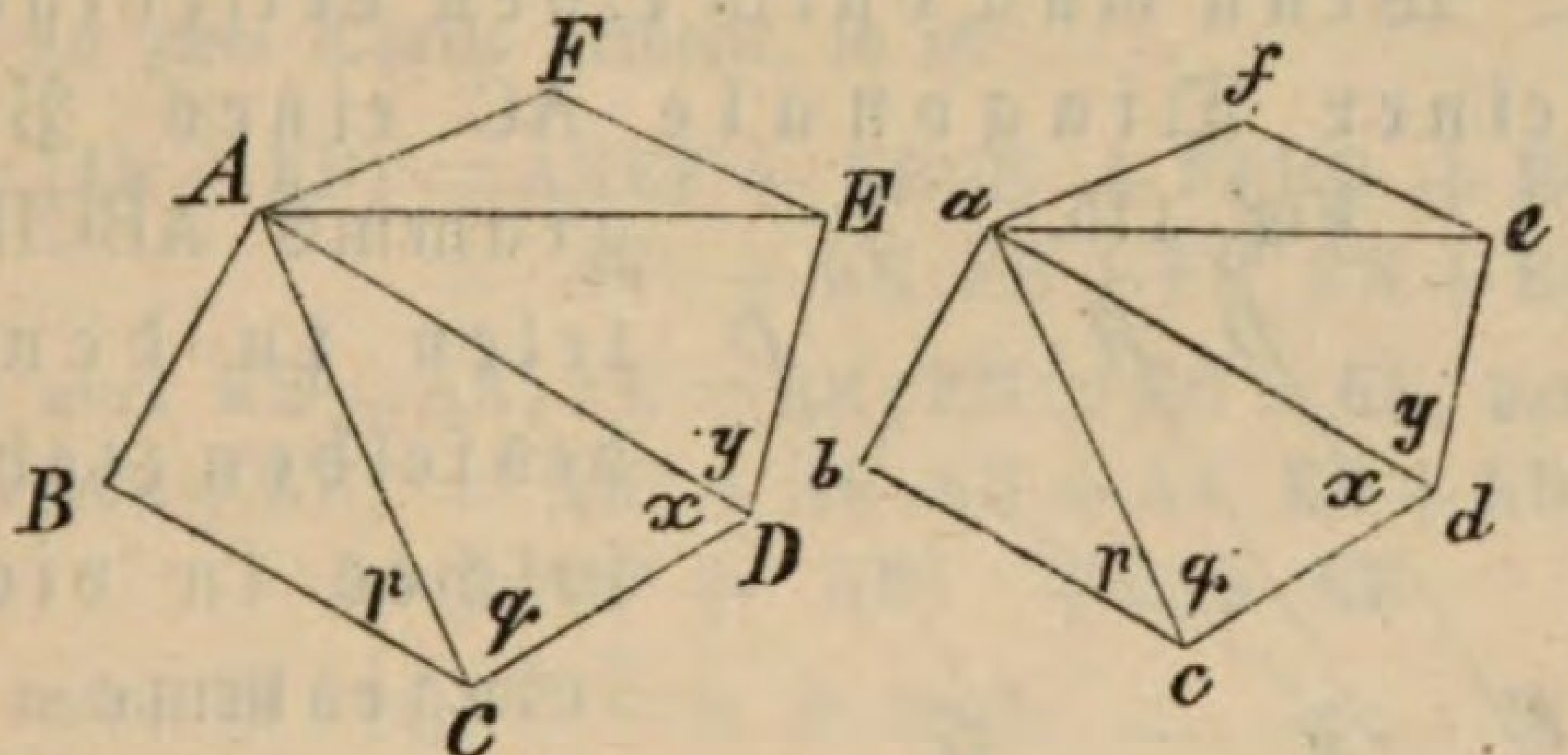
$$\triangle ABC : \triangle abc = BC^2 : bc^2 = AC^2 : ac^2$$
$$= AB^2 : ab^2 = AD^2 : ad^2$$

(W. Z. E.)

§. 105.

Lehrsatz. Die Flächeninhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich, wie die Quadrate homologer Seiten oder homologer Diagonalen. (Fig. 114. a.)

Fig. 114. a.



Beweis. Es sey ABCDEF... ∾ abcdef ... und durch die homologen Diagonalen AE, ae, AD, ad, AC, ac u. s. w. seyen die ähnlichen Vielecke in ähnliche Dreiecke zerlegt (§. 89. II.), nämlich es sey $\triangle ABC \backsim \triangle abc$, $\triangle ADC \backsim \triangle adc$, $\triangle ADE \backsim \triangle ade$ 2c.

so ist 1) $\triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2$ (§. 104.)

$\triangle ACD : \triangle acd = AC^2 : ac^2$, also auch

2) $\triangle ACD : \triangle acd = AB^2 : ab^2$

Ferner ist $\triangle ADE : \triangle ade = AD^2 : ad^2$.

Es ist aber $AD : ad = AC : ac = AB : ab$, $DE : de$

$AD^2 : ad^2 = AC^2 : ac^2 = AB^2 : ab^2 = DE^2 : de^2$, daß.

3) $\triangle ADE : \triangle ade = AB^2 : ab^2$. Ebenso ist

4) $\triangle AEF : \triangle aef = AB^2 : ab^2$

Mithin ergibt sich aus diesen Proportionen, nämlich

aus 1) $\triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2$

2) $\triangle ACD : \triangle acd = AB^2 : ab^2$

3) $\triangle ADE : \triangle ade = AB^2 : ab^2$

4) $\triangle AEF : \triangle aef = AB^2 : ab^2$

folgende Proportion:

$(\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE : \triangle AEF + \ldots) : (\triangle abc + \triangle acd + \triangle ade + \triangle aef \ldots) = AB^2 : ab^2$

d. h. $ABCDEF \ldots : abcdef \ldots = AB^2 : ab^2$. (W. Z. E.)

Weil nun aber in den ähnlichen Vielecken auch folgende Proportionen Statt finden:

$CD : cd = DE : de = AC : ac = AD : ad$

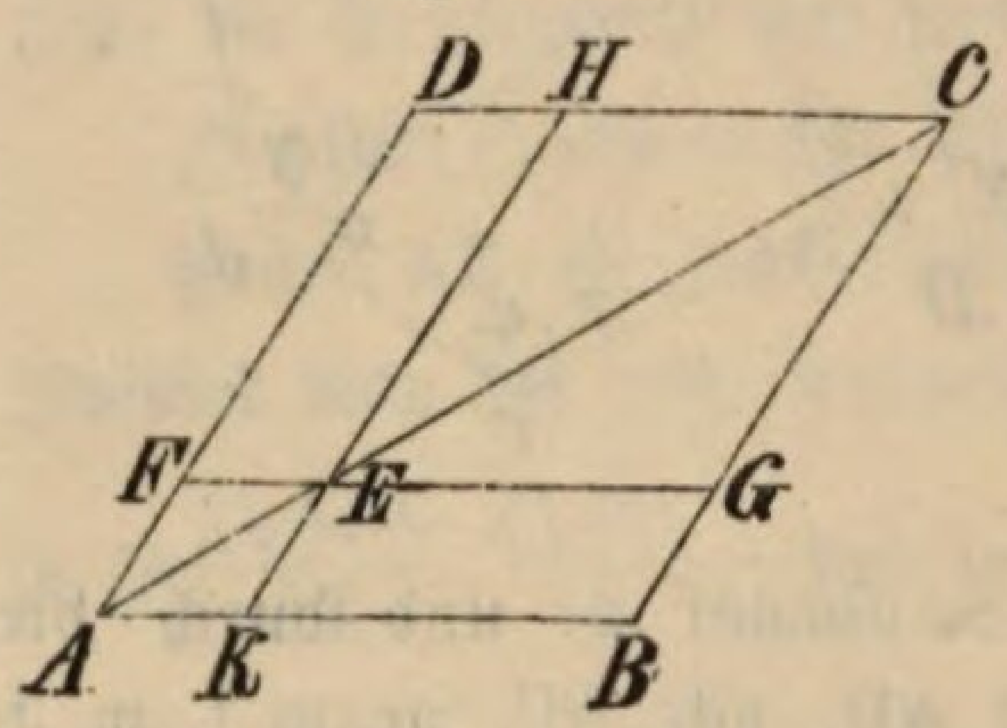
$AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = AC : ac = AD : ad$ 2c.

oder $AB^2 . ab^2 = BC^2 : bc^2 = CD^2 : cd^2 = DE^2 : de^2 = AC^2 : ac^2 = AD^2 : ad^2$ ꝛc.
so ist auch $ABCDEF \ldots : abcdef \ldots = AB^2 : ab^2 = BC^2 . bc^2 = DE^2 : de^2 = AC^2 : ac^2 = AD^2 : ad^2$ ꝛc. (W. Z. E.)

§. 106.

Lehrsatz. Wenn man durch einen beliebigen Punkt E einer Diagonale AC eines Parallelogramms ABCD Parallelen zu den Seiten desselben zieht, so wird solches in vier Parallelogramme zerlegt, und von diesen sind die zwei Parallelogramme, durch welche die Diagonale nicht geht, am Flächenraume einander gleich. (Fig. 115.)

Fig. 115.



Bedingung.	Behauptung.
AB ‖ DC ‖ FG	FEHD = KBGE.
AD ‖ BG ‖ KH.	

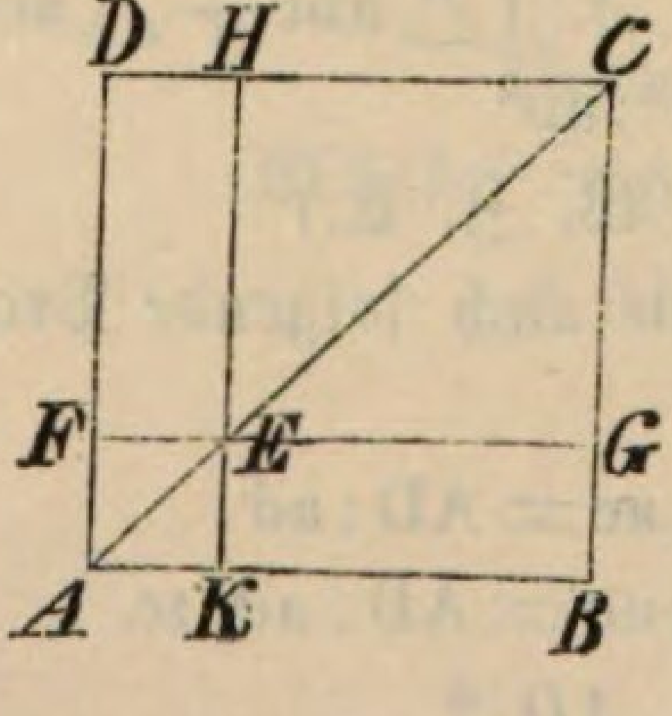
Beweis. Vermöge der Bedingung sind ABCD, FEHD, KBGE, so wie AKEF, EGCH Parallelogramme (§. 84. Z. 2.), daher

$$\triangle ADC \cong \triangle ABC \text{ (§. 84. Z. 4.)}$$
$$\triangle AFE \cong \triangle AKE$$
$$\triangle EHC \cong \triangle EGC, \text{ oder}$$

$$\triangle ADC - (\triangle AFE + \triangle EHC) = \triangle ABC - (\triangle AKE + \triangle EGC),$$

d. h. Parallelogramm FEHD = Parallelogramm KBGE.

Fig. 116.



Zusatz 1. Ist ABCD ein Quadrat, so sind die beiden Parallelogramme, durch welche die Diagonale geht, ebenfalls Quadrate, die beiden andern aber Rechtecke. (Fig. 116.)

Denn $\angle CAB = \angle CAD = \frac{1}{2}R$ (§. 85. III.) folglich $\triangle AKE = \triangle AFE$ rechtwinkelig und gleichschenkelig, mithin AKEF ein Quadrat. Dasselbe läßt sich von EGCH darthun.

D, B sind rechte Winkel, deshalb FEHD, KBGE Rechtecke. (§. 84. Z. 3.)

Zusatz 2. Denkt man sich die Seite AB des Quadrats ABCD im Punkte K in zwei Theile getheilt, so ist

$$AB^2 = (AK + KB)^2 = AKEF + KBGE + FEHD + EGCH$$
$$= AK^2 + KB.KE + FE.EH + EG^2$$

Es ist aber $KE = AK$; $FE = AK$; $EH = EG = KB$, deshalb

$$AB^2 = (AK + KB)^2 = AK^2 + AK.KB + AK.KB + KB^2$$
$$= AK^2 + KB^2 + 2AK.KB$$

Setzt man $AK = a$, $KB = b$, so wird

$$AB^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab, \text{ d. h.}$$

Das Quadrat, errichtet über der Summe zweier Linien, ist gleich der Summe der Quadrate der beiden Linien, mehr dem doppelten Rechteck aus diesen Linien.

Zusatz 3. Es ist

$$AK = AB - KB$$

daher auch $AK^2 = (AB - KB)^2$

$$AK^2 = AKEF$$

also

$$(AB - KB)^2 = AKEF$$
$$= ABCD - (FGCD + KBCH - EGCH)$$
$$= ABCB - (FG.FD + KH.KB - EG.EG)$$
$$= AB^2 - (AB.KB + AB.KB - KB^2)$$
$$= AB^2 - AB.KB - AB.KB + KB^2$$
$$= AB^2 + KB^2 - 2AB.KB$$

Setzt man $AB = a$, $KB = b$, so ist

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab, \text{ d. h.}$$

Das Quadrat, errichtet über der Differenz zweier Linien, ist gleich der Summe der Quadrate dieser beiden Linien, weniger dem doppelten Rechteck aus diesen Linien.

Zusatz 4. Es ist

$$ABGF = AB.AF = AB.AK = (AK + KB)\ AK$$

aber auch $ABGF = AKEF + KBGE$

$$= AK^2 + BG.KB$$

$$= AK^2 + AK.KB$$

Also $(AK + KB)\ AK = AK^2 + AK.KB$

Ist $AK = a$, $KB = b$, so wird

$$(a + b)\ a = a^2 + ab,\ \text{d. h.}$$

Das Rechteck aus der Summe zweier Linien und einer von diesen, ist gleich dem Quadrate dieser einen Linie, mehr dem Rechteck aus dieser und der andern Linie.

Zusatz 5. Es ist $AKHD = ABCD - KBCH$

aber auch $AKHD = AK.AD = AK.AB$

$$= (AB - KB)\ AB$$

Also $(AB - KB)\ AB = ABCD - KBCH$

$$= AB^2 - BC.KB$$

$$= AB^2 - AB.KB$$

Wird $AB = a$, $KB = b$ gesetzt, so ist

$$(a - b)\ a = a^2 - ab,\ \text{d. h.}$$

Das Rechteck aus der Differenz zweier Linien und der größern von diesen ist gleich dem Quadrate dieser größern Linie, weniger dem Rechteck aus der größern und kleinern Linie.

Zusatz 6. Es ist $KBGE = ABGF - AKEF$

aber auch $KBGE = KB.KE = KB.AK$

$$= (AB - AK)\ AK$$

daher $(AB - AK)\ AK = ABGF - AKEF$

$$= AB.AF - AK^2$$

$$= AB.AK - AK^2$$

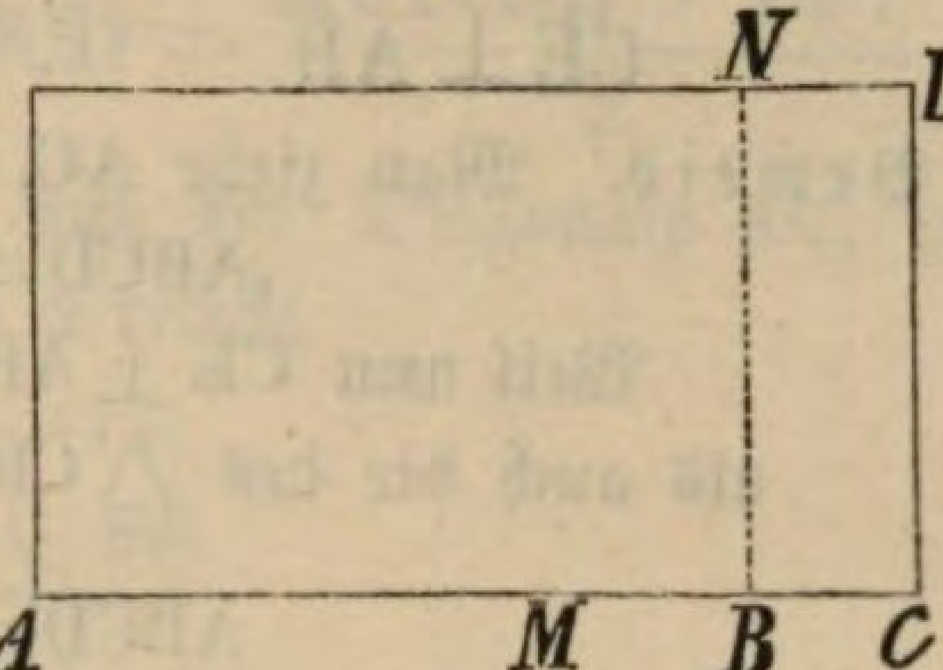
Oder, wenn man $AB = a$, $AK = b$ setzt, so wird

$$(a - b)\ b = ab - b^2,\ \text{d. h.}$$

Das Rechteck aus der Differenz zweier Linien und der kleinern von diesen ist gleich dem Rechteck aus der größern und kleinern Linie, weniger dem Quadrate der kleinern Linie.

Zusatz 7. Wenn man (Fig. 117.) die Linie AB im Punkte M in zwei Theile theilt, die Verlängerung derselben BC = dem anliegenden Theil BM macht, in C eine Senkrechte CD = AM = dem andern Theil der Linie AB errichtet und das Rechteck AD vollendet, so ist

Fig. 117.



$$AD = AC \,.\, CD = (AB + BM)\; AM$$
$$= (AB + BM)\;(AB - BM)$$

Zieht man BN || CD, so ist auch

$$\begin{aligned} AD &= AN + BD \\ &= AB.BN + BC.CD \\ &= AB.CD + BC.CD \\ &= AB.AM + BM.AM \\ &= AB\,(AB - BM) + BM\,(AB - BM) \\ &= AB^2 - AB.BM + AB.BM - BM^2 \quad \text{(Zus. 5. und 6.)} \\ &= AB^2 - BM^2 \end{aligned}$$

Es war aber oben $AD = (AB + BM).(AB - BM)$; daher

$$(AB + BM)\;(AB - BM) = AB^2 - BM^2$$

Bezeichnet man AB durch a und BM durch b, so ist

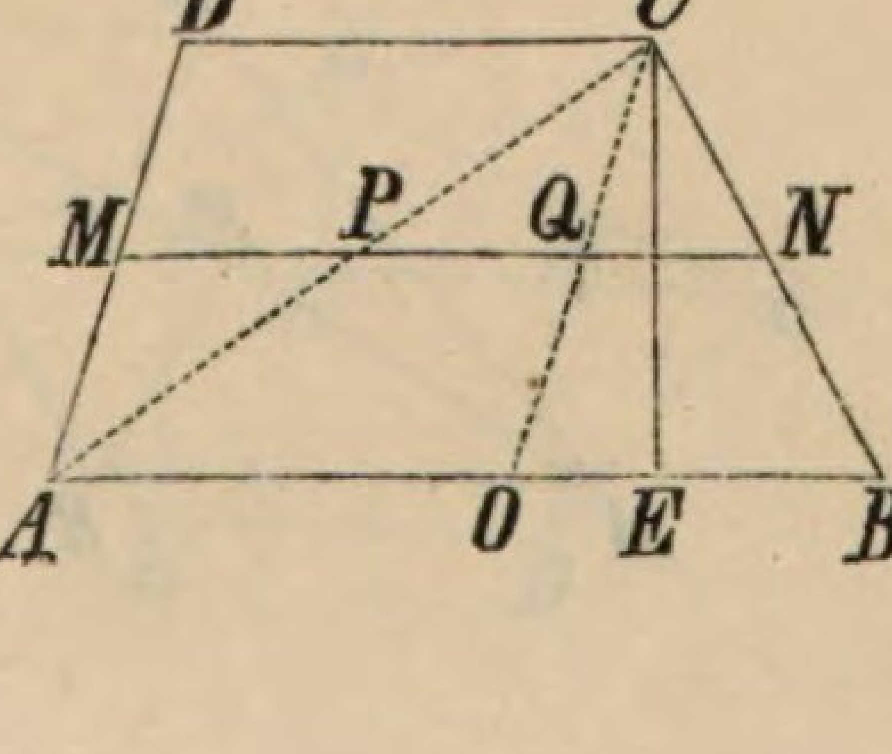
$$(a + b)\;(a - b) = a^2 - b^2, \text{ d. h.}$$

Das Rechteck aus der Summe und Differenz zweier Linien ist gleich der Differenz der Quadrate dieser Linien.

§. 107.

Lehrsatz. **Der Flächenraum eines Trapezes ist gleich dem halben Produkte aus der Summe seiner zwei parallelen Seiten in die Entfernung dieser Seiten.** (Fig. 118.)

Fig. 118.



Bedingung.	Behauptung.
AB ∥ DC CE ⊥ AB.	$ABCD = \frac{(AB + DC)}{2} CE.$

Beweis. Man ziehe AC, so ist

$$ABCD = \triangle ABC + \triangle CDA$$

Weil nun CE ⊥ AB, so ist CE sowohl die Höhe des △ABC als auch die des △CDA; daher

$$ABCD = \frac{AB.CE}{2} + \frac{DC.CE}{2} \quad (\text{§. 101. Z. 2.})$$

$$= \frac{AB.CE + DC.CE}{2} = \frac{(AB + DC)}{2} CE$$

Zusatz. Zieht man CO ∥ AD, so ist

$$\text{Trapez } ABCD = \text{Parallelogr. } AOCD + \text{Dreieck } OBC$$

$$= AO.CE + \frac{OB.CE}{2}$$

Halbirt man AC in P und zieht durch P die Gerade MN ∥ AB, so ist

$$AC : PC = OC : QC = 2 : 1$$

Es ist aber auch $OC : QC = OB : QN = 2 : 1$

Daraus $QN = \frac{OB}{2}$

folglich Trapez $ABCD = AO.CE + QN.CE$

$$= (AO + QN)\ CE$$

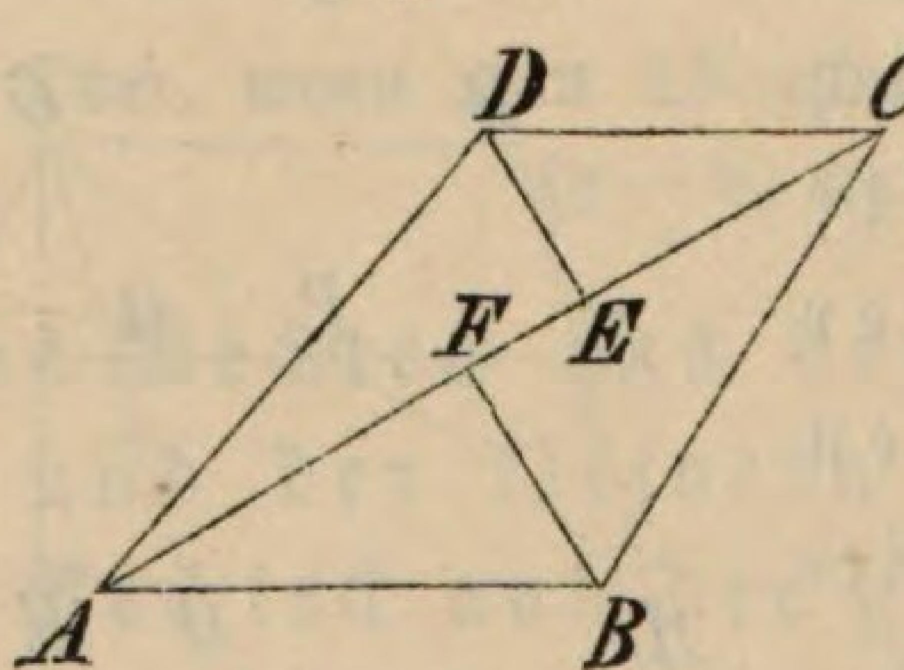
$$= (MQ + QN)\ CE = MN.CE, \text{ d. h.}$$

Der Flächenraum eines Trapezes ist gleich dem Produkte aus der Geraden, welche durch die Mitte einer Diagonale zu seinen zwei parallelen Seiten parallel geführt ist, in die Entfernung der zwei parallelen Seiten.

§. 108.

Lehrsatz. **Der Flächenraum eines Trapezoides ist gleich dem halben Produkte aus einer Diagonale in die Summe der Entfernungen dieser von den Spitzen der beiden Winkel, welche ihr gegenüberliegen.** (Fig. 119.)

Fig. 119.



Bedingung. **Behauptung.**

$DE \perp AC$
$BF \perp AC.$

$$ABCD = \frac{AC.(DE + BF)}{2}.$$

Beweis. Weil DE und BF senkrecht auf der Diagonale AC, so sind sie die Höhen ihrer zugehörigen Dreiecke.

$$\text{Nun ist } ABCD = \triangle ACD + \triangle ACB,$$

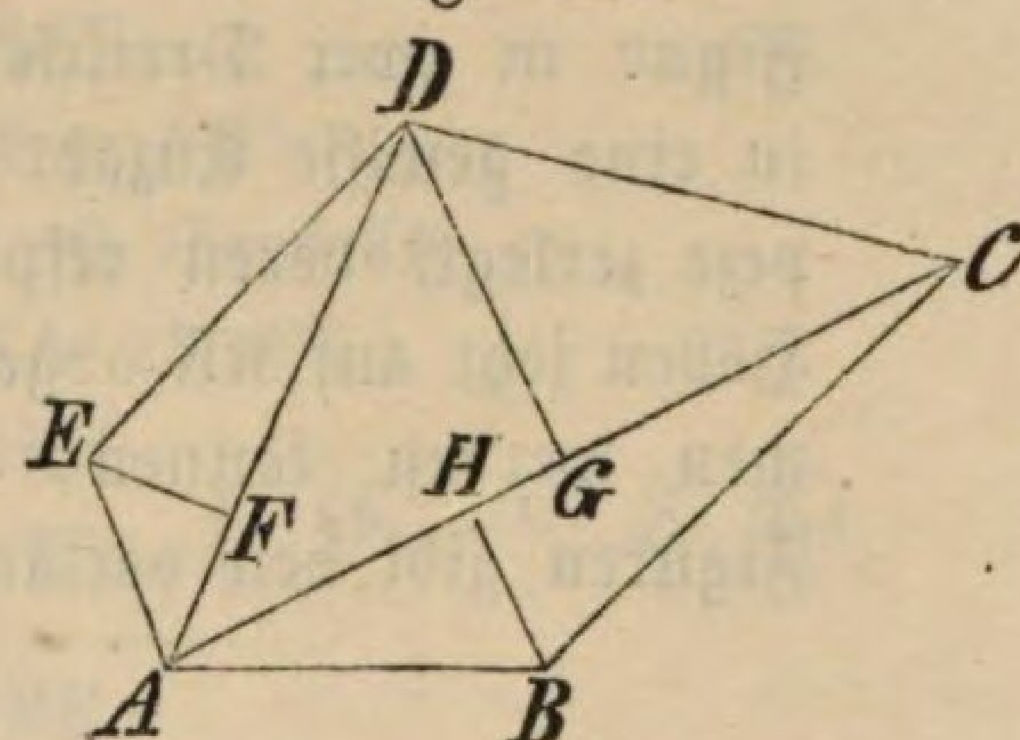
$$\text{also auch } ABCD = \frac{AC.DE}{2} + \frac{AC.BF}{2}$$

$$= \frac{AC(DE + BF)}{2}$$

§. 109.

Aufgabe. Den Flächenraum eines beliebigen Vielecks zu bestimmen.

Fig. 120.



Auflösung I. Man zerlege das gegebene Vieleck durch Diagonalen in lauter Dreiecke und berechne jedes Dreieck besonders, die Summe aller Dreiecke ist der verlangte Flächenraum der Figur.

So ist (Fig. 120.)

$$ABCDE = \triangle ADE + \triangle ACD + \triangle ACB$$

$$= \frac{AD.EF}{2} + \frac{AC.DG}{2} + \frac{AC.BH}{2}$$

$$= \frac{AD.EF}{2} + \frac{AC.(DG + BH)}{2}$$

Man wird hier leicht einsehen, daß es zweckmäßig ist, wenn man zweien neben einander liegenden Dreiecken immer einerlei Grundlinie gibt.

Auflösung II. Man ziehe (Fig. 121.) eine Diagonale AC und auf diese von den übrigen Winkelspitzen, E, D, der Figur Senkrechte, EF, GD, so wird die Figur in Dreiecke und Trapeze zerlegt, welche addirt den ganzen Flächenraum geben.

Fig. 121.

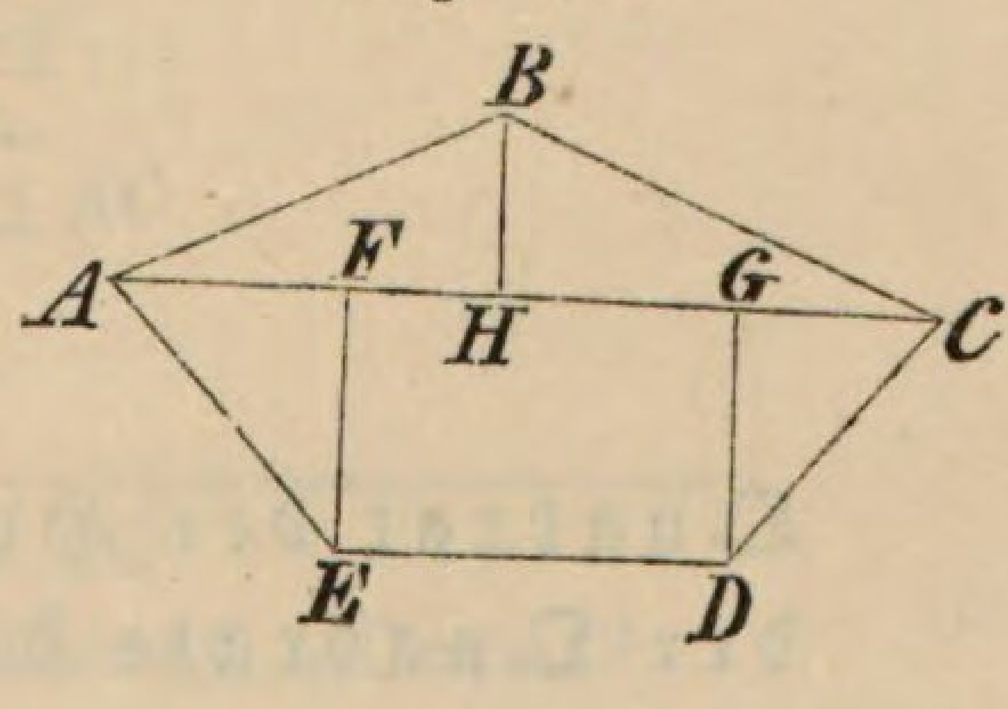
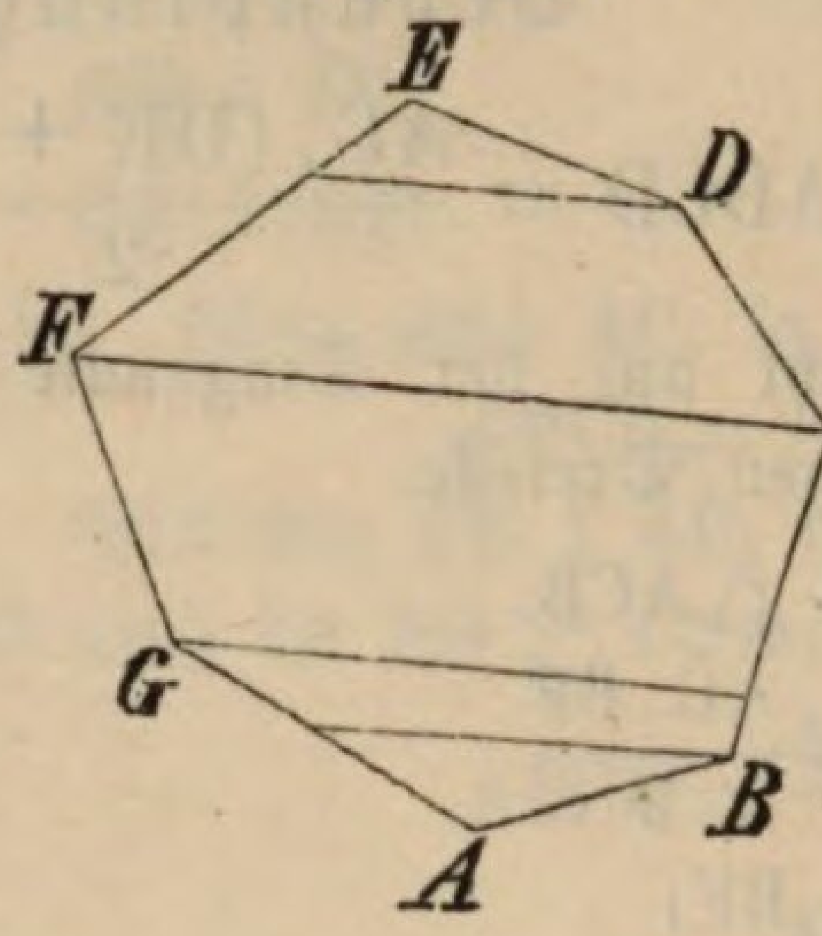
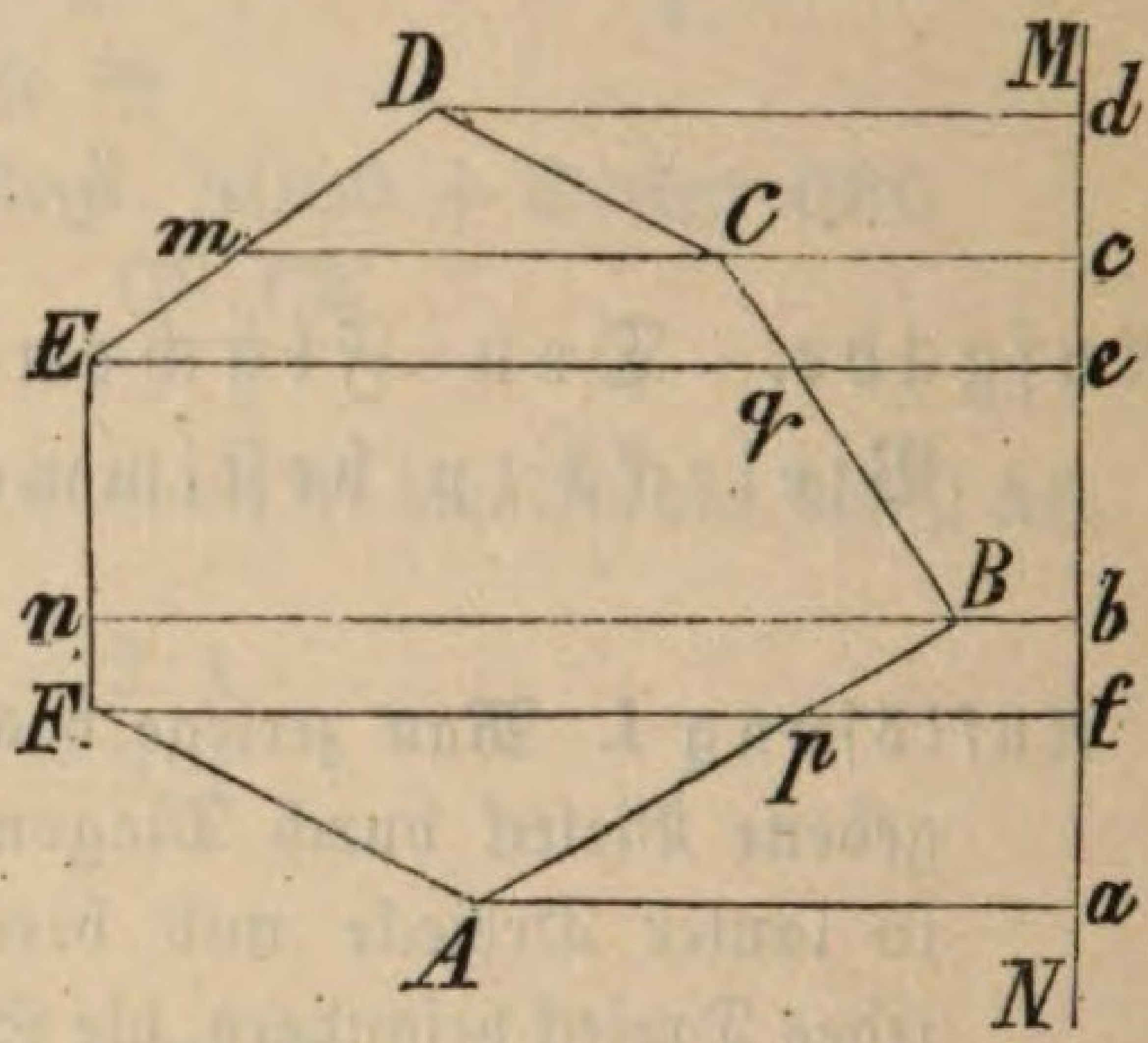


Fig. 122.



Auflösung III. Man ziehe (Fig. 122.) eine Diagonale FC und zu dieser durch die übrigen Winkelspitzen E, G, B, parallele Linien, so wird die Figur in zwei Dreiecke und eine gewisse Anzahl Trapeze zerlegt, welche nun zu addiren sind.

Fig. 123.

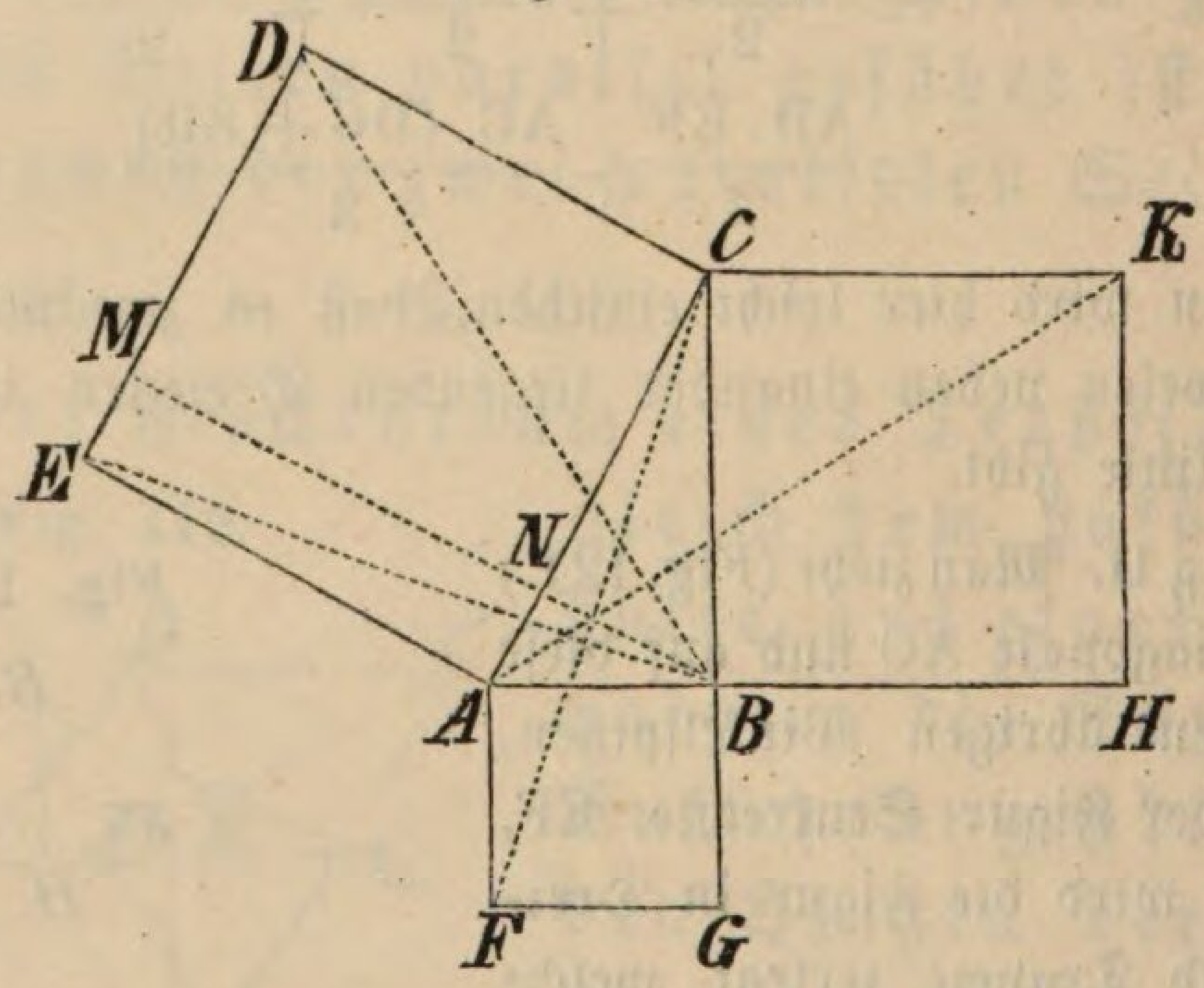


Auflösung IV. (Fig. 123.) Man lege neben die Figur ABCDEF eine Gerade MN und ziehe von allen Winkelspitzen Senkrechte, welche auch durch die Figur gehen, auf diese Gerade, so wird die Figur in zwei Dreiecke und in eine gewisse Anzahl Trapeze zerlegt, deren respektive Höhen jetzt auf MN abgenommen werden können; die Summe der berechneten einzelnen Figuren gibt den verlangten Flächenraum.

§. 110.

Lehrsatz. In jedem rechtwinkeligen Dreieck ist das

Fig. 124.



Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten. (Fig. 124.)

Bedingung. Im $\triangle ABC$ sey $\angle B = R$.

Behauptung. $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Beweis. Man errichte über der Hypotenuse AC das Quadrat ACDE und eben so über den beiden Katheten AB und BC die Quadrate ABGF und BCKH, so sind GC und AH (nach §. 8.) gerade Linien.

Von der Spitze B des rechten Winkels lege man die Gerade BM in das Quadrat der Hypotenuse so, daß $MB \parallel AE$ ist und ziehe BE und FC, so ist

$AB = AF$ (als Seiten eines Quadrats)
$AE = AC$ (aus demselben Grunde)
$\angle BAE = \angle FAC$ (denn jeder $= R + \angle BAC$)

folglich $\triangle BAE \cong \triangle FAC$ (§. 38.)
Nun ist $\triangle BAE = {}^1/_2\, AEMN$
und auch $\triangle FAC = {}^1/_2\, ABGF$ } (§. 101. Z. 2.

daher ${}^1/_2\, AEMN = {}^1/_2\, ABGF$
oder I. $AEMN = ABGF = AB^2$

Zieht man ferner BD und AK, so ist ebenfalls
$\triangle BCD \cong \triangle CKA$ (§. 38.)
ebenso $\triangle CKA = {}^1/_2\, CBHK$
und auch $\triangle BCD = {}^1/_2\, CDMN$ } (§. 101. Z. 2.)

daher ${}^1/_2\, CDMN = {}^1/_2\, BCKH$
oder II. $CDMN = BCKH = BC^2$

Nun war oben I. $AEMN = AB^2$
und jetzt II. $CDMN = BC^2$

daher $AEMN + CDMN = AB^2 + BC^2$
oder $AC^2 = AB^2 + BC^2$ (W. Z. E.)

Zusatz 1. Dieser Lehrsatz, einer der wichtigsten und fruchtbarsten in der Geometrie, wird nach seinem Erfinder Pythagoras der pythagorische Lehrsatz genannt. Dieser Satz kann auch so bewiesen werden:

Nach §. 100. Z. 4. ist, weil $BN \perp AC$
$AB^2 = AN \cdot AC$
und $BC^2 = CN \cdot AC$

daher $AB^2 + BC^2 = AN \cdot AC + CN \cdot AC$
$= (AN + CN) AC = AC \cdot AC = AC^2$

Zusatz 2. Weil $AC^2 = AB^2 + BC^2$, so ist auch

$$AC^2 - AB^2 = BC^2,$$ d. h.

die Differenz zwischen dem Quadrate der Hypotenuse und dem Quadrate der einen Kathete ist gleich dem Quadrate der andern Kathete.

Zusatz 3. Ist $AB = BC$, d. h. ist das rechtwinkelige Dreieck ABC zugleich gleichschenkelig, so ist

$$AC^2 = 2AB^2,$$ d. h.

im gleichschenkeligen, rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat construirt über der Hypotenuse zweimal so groß als das Quadrat construirt über einer Kathete, oder auch: das Quadrat der Kathete ist die Hälfte des Quadrats der Hypotenuse.

Zusatz 4. Der Ausdruck $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ stellt demnach nichts anderes vor, als: x ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten a und b sind; denn es ist $x^2 = a^2 + b^2$.

Ebenso bezeichnet die Gleichung $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ nichts anderes, als daß x die Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse a und dessen andere Kathete b ist; denn es ist wieder $x^2 = a^2 - b^2$.

Zusatz 5. Wenn man über den drei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks drei ähnliche Figuren construirt, so ist der Flächenraum der über der Hypotenuse construirten Figur gleich der Summe der Flächenräume der beiden über den Katheten construirten Figuren;

Denn ähnliche Figuren verhalten sich, wie die Quadrate homologer Seiten (§. 104.) Bezeichnet nun F die über der Hypotenuse H; F′ und F″ aber die über den Katheten K′ und K″ construirten ähnlichen Figuren, so ist

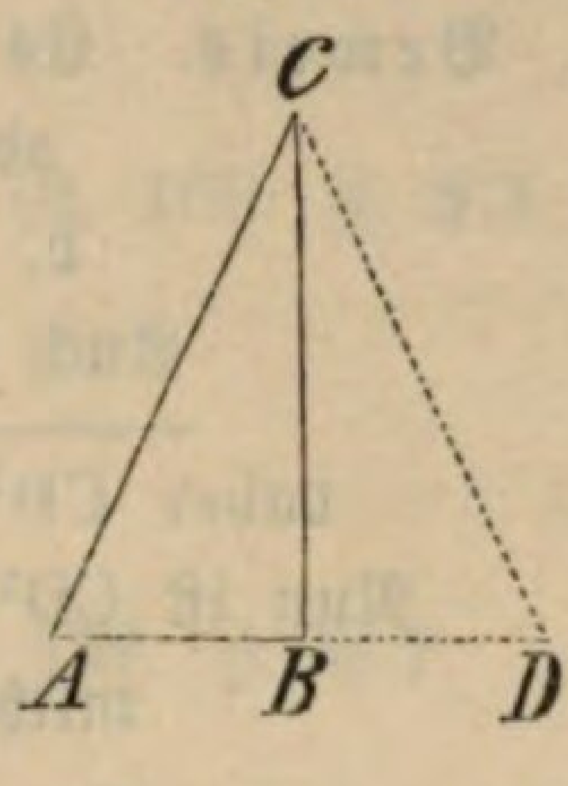
$$F : F' : F'' = H^2 : K'^2 : K''^2;$$

Weil aber $H^2 = K'^2 + K''^2$, so ist auch

$$F = F' + F''$$

§. 111.

Fig. 125.



Lehrsatz. Wenn in einem Dreiecke das Quadrat der einen Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten ist, so schließen letztere einen rechten Winkel ein. (Fig. 125.)

Bedingung.	Behauptung.
$AC^2 = AB^2 + BC^2$.	$\angle ABC = R$.

Beweis. Im Punkte B errichte man auf BC eine Senkrechte DB $= AB$ und ziehe CD, so ist nach §. 110.

$$CD^2 = BC^2 + DB^2;$$

Nun ist $DB = AB$

also auch $DB^2 = AB^2$

folglich $CD^2 = BC^2 + AB^2$ (B. D. C.)

Es ist aber $AC^2 = BC^2 + AB^2$ (B. D. B.)

daher $CD^2 = AC^2$

oder $CD = AC$

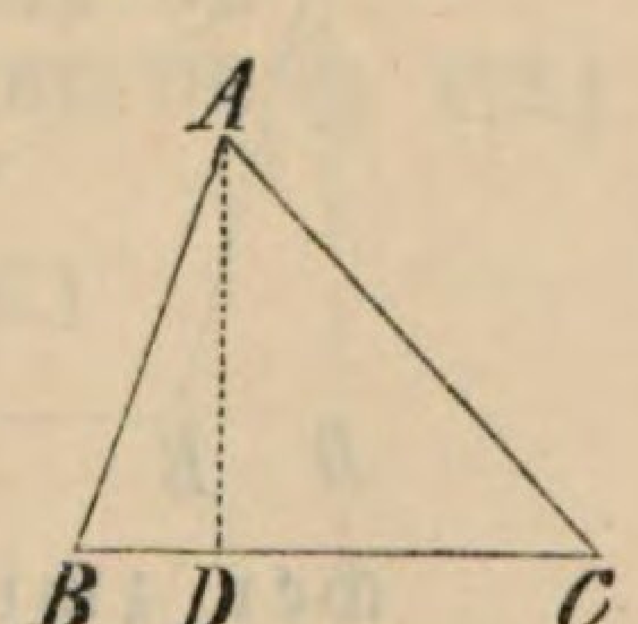
folglich $\triangle ABC \cong \triangle DBC$ (§. 42.)

daher $\angle ABC = \angle DBC = R$. (§. 6.)

§. 112.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke ABC ist das Quadrat der Seite AE, welche dem spitzen Winkel B gegenüberliegt, kleiner als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, und zwar kleiner um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten BC und dem Abschnitt BD, welcher zwischen der Senkrechten AD und dem Scheitel B des spitzen Winkels liegt. (Fig. 126.)

Fig. 126.



Bedingung. **Behauptung.**

$\angle B < R.$ $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD.$

Beweis. Es ist $CD = BC - BD$

oder $CD^2 = (BC - BD)^2$

d. h. $CD^2 = BC^2 + BD - 2BC.BD$ (§. 106. Z. 3.)

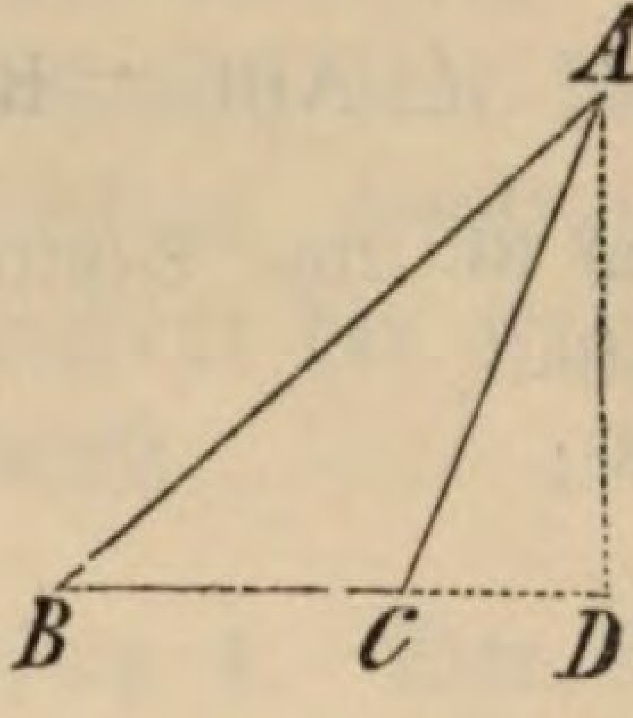
Auch ist $AD^2 = AB^2 - BD^2$ (§. 110. Z. 2.)

daher $CD^2 + AD^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD.$

Nun ist $CD^2 + AD^2 = AC^2$

mithin $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$ (W. Z. E.)

Fig. 127.



Wäre aber $\angle C > R$, so fiele die Senkrechte AD außerhalb des Dreiecks und zwar auf die Seite des stumpfen Winkels (§. 55. Z. 2.) und in diesem Fall hat man (Fig. 127.)

$CD = BD - BC$

oder $CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2BD.BC$

Auch ist $AD^2 = AB^2 - BD^2$

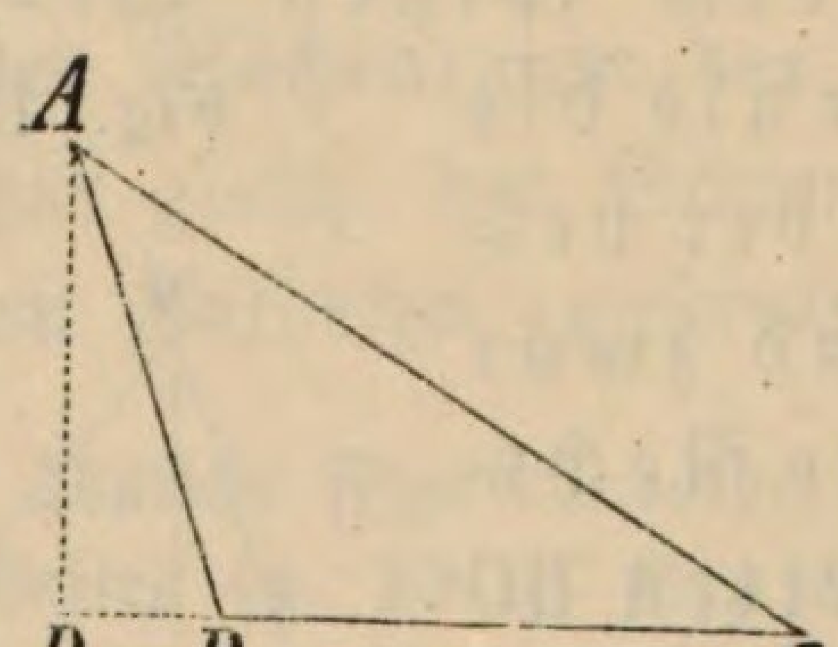
folgl. $CD^2 + AD^2 = AB^2 + BC^2 - 2BD.BC.$

oder $AC^2 = AB^2, + BC^2 - 2BD.BC$ (W. Z. E.)

§. 113.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke ABC ist das Quadrat der Seite AC, welche dem stumpfen Winkel B gegenüberliegt, größer als die Summe der Quadrate der beiden andern Seiten und zwar größer um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten BC und dem Abschnitt BD, welcher zwischen der Senkrechten AD und dem Scheitel des stumpfen Winkels B liegt. (Fig. 128.)

Fig. 128.



Bedingung. $\angle B > R.$

Behauptung. $AC^2 = AB^2 + BC^2 + BC \cdot BD.$

Beweis. Es ist $DC = BC + DB$

oder $DC^2 = BC^2 + 2BC \cdot DB + DB^2$ (§. 106. Z. 2.)

Weil aber auch $AD^2 = AB^2 - DB^2$

so ist $DC^2 + AD^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot DB.$

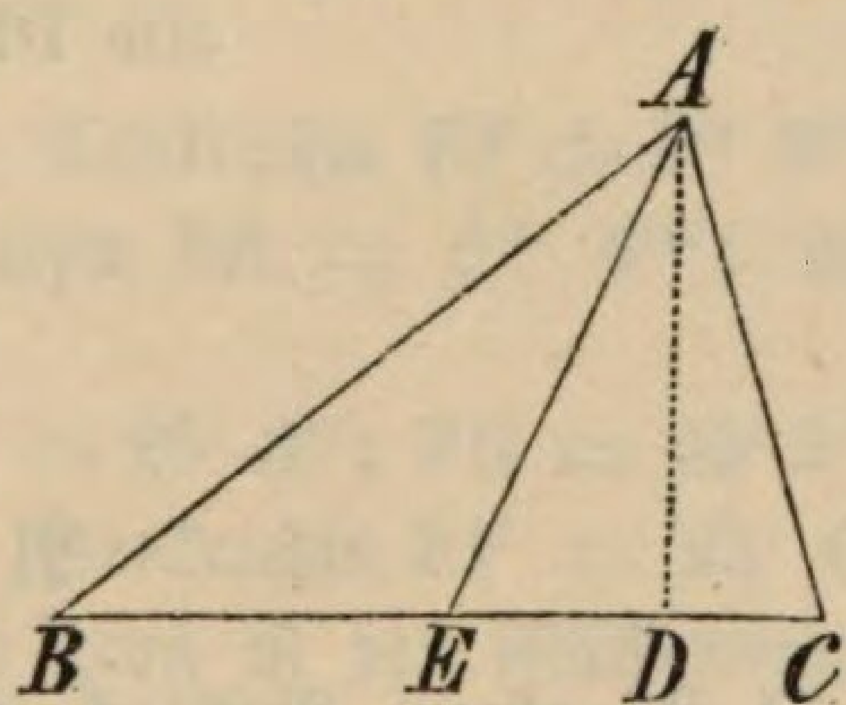
Nun ist $DC^2 + AD^2 = AC^2$

mithin auch $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \cdot BD.$ (W. Z. E.)

§. 114.

Lehrsatz. Wenn man in einem Dreieck ABC von der Spitze A irgend eines Winkels in die Mitte E der gegenüberliegenden Seite BC eine Gerade AE zieht, so ist das doppelte Quadrat dieser halbirenden Linie mehr dem doppelten Quadrate der halben getheilten Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten. (Fig. 129.)

Fig. 129.



Bedingung. $BE = EC.$

Behauptung. $2AE^2 + 2BE^2 = AB^2 + AC^2.$

Beweis. Man fälle die Senkrechte AD, so ist im $\triangle ABE$ nach §. 113.

$$AB^2 = AE^2 + BE^2 + 2BE \cdot DE$$

ferner im $\triangle ACE$ ist $AC^2 = AE^2 + EC^2 - 2EC \cdot DE$ (§. 112.)

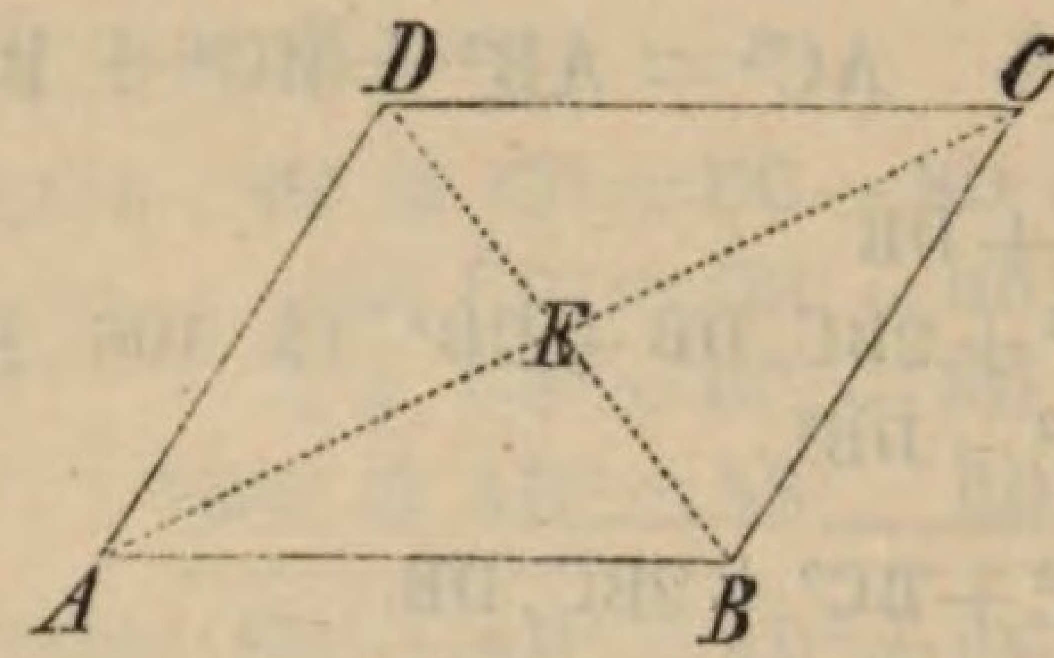
oder $AB^2 + AC^2 = 2AE^2 + 2BE^2;$

denn $BE = EC.$ (W. Z. E.)

§. 115.

Lehrsatz. In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der

Fig. 130.



Summe der Quadrate der vier Seiten. (Fig. 130.)

Beweis. Nach §. 84. Z. 2. halbiren sich die Diagonalen wechselseitig, folglich nach vorigem §. ist in den △△ABC, ADC

$$2BE^2 + 2AE^2 = AB^2 + BC^2$$
$$2DE^2 + 2AE^2 = AD^2 + DC^2.$$

Addirt man nun diese beiden Gleichungen und bemerkt, daß $BE = DE$, so erhält man:

$$4BE^2 + 4AE^2 = AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2$$

Es ist aber $4BE^2 + 4AE^2 = (2BE)^2 + (2AE)^2 = DB^2 + AC^2$

also $DB^2 + AC^2 = AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2$.

(W. Z. E.)

§. 116.

Aufgaben.

1) In einem Rechteck ist eine Seite = 12′ 7″ 5‴, die anstoßende = 9′ 6″ 8‴ (Decimaleintheilung); wie groß ist der Flächenraum dieser Figur?

2) Wie groß ist der Flächenraum eines Quadrats, dessen Seite = 5′ 6″ 10‴ (Duodecimaleintheilung) ist?

3) Der Flächenraum eines Rechtecks ist = 100 Quadratfuß, eine Seite = 15′ 6″ 3″ (Duodecimaleintheilung); wie groß ist die anstoßende Seite?

4) Der Flächenraum eines Quadrats = 1968□′ 65□″ (Decimaleintheilung); wie groß ist die Seite?

5) Wie groß wäre aber diese Seite, wenn obiger Flächenraum nach der Duodecimaleintheilung bestimmt wäre?

6) Ein Parallelogramm habe zur Grundlinie eine Länge von 108′ 9″ 8‴ und zur Höhe eine Länge von 75′ 6″ (Decimaleintheilung); wie groß ist dessen Flächenraum?

7) Wie groß ist der Flächenraum eines Dreiecks, dessen Grundlinie = 7′ 8″ 10‴ und dessen Höhe = 11′ 5″ (Duodecimaleintheilung) ist?

8) Wie hoch ist ein Dreieck, das 100 Quadratfuß Flächeninhalt hat, wenn die Grundlinie = 20′ 6″ 9‴ (Decimaleintheilung) ist?

9) Ein Parallelogramm habe zur Grundlinie 10′ 5″ 8‴ und zur Höhe 12′ 9″ 11‴ (Duodecimaleintheilung) und ein Dreieck habe zur Grundlinie 20′ 9″ 7‴ und zur Höhe 19′ 8″ (Decimaleintheilung); wie groß muß die Seite eines Quadrats, in Decimalmaß und Duodecimalmaß ausgedrückt, seyn, welches denselben Flächenraum wie diese beiden Figuren zusammengenommen enthält?

10) Der Flächenraum eines Dreiecks sey 50□′ 47□″ 58□‴, der eines Rechtecks = 68□′ 59□″ 80□‴ Decimaleintheilung; man soll die Summe der beiden Flächenräume im Duodecimalmaß angeben.

11) Im Trapez ABCD (Fig. 118.) ist AB = 20′ 7″ 3‴; DC = 12′ 8‴; die Senkrechte CE = 9′ 7‴; wie groß ist der Flächenraum dieser Figur, wenn die Längen nach der Decimaleintheilung bestimmt sind?

12) In Figur 119 ist AC = 24′ 6″ 10‴; die Senkrechte DE = 5′ 6″; die Senkrechte BF = 8′ (Duodecimaleintheilung); wie groß ist ABCD?

13) Es sey AD = 20″; AC = 24″ 5‴; die Senkrechte EF = 5″ 6‴; die Senkrechte DG = 15″; die Senkrechte BH = 3″ 4‴; wie groß ist ABCDE? (Fig. 120.)

14) In Figur 121 sey AC = 105′ 6″; AF = 25′ 3″; FG = 49′ 9″; die Senkrechte BH = 12′ 5″ 3‴; die Senkrechte EF = 25′ 6″ 5‴; die Senkrechte DG = 23′ 8″; wie groß ist der Flächenraum von ABCDE?

15) In Figur 123 ist mC = 48′ 3″; Eq = 64′ 5″; nB = 80′ 4″; Fp = 78′ 5″; ferner dc = 11′ 7″, ec = 9′ 8″, eb = 23′ 4″, bf = 6′ 5″, fa = 19′ 7″ Decimalmaß; wie groß ist der Flächenraum der geradlinigen Figur ABCDEF, wenn Dd, mc, Ee, nb, Ff, Aa senkrecht auf MN stehen?

B. Verwandlung des Flächenraums.

§. 117.

Erklärung. Eine Figur in eine andere **verwandeln**, heißt die Grenzen derselben nach gegebenen Bestimmungen so zu ändern, daß der Flächenraum der nämliche bleibt.

§. 118.

Aufgabe. Ein gegebenes Parallelogramm in ein anderes mit einem gegebenen Winkel zu verwandeln.

Auflösung. Es sey (Fig. 114.) ABDH das gegebene Parallelogramm und x der gegebene Winkel. Man construire ∠FAB = x, ziehe BE || AF, und verlängere DC, bis die Durchschnitte F, E entstehen, so ist ABEF das verlangte Parallelogramm.

Beweis. ABEF = ABGH (§. 101. Z. 4.); auch hat das erhaltene Parallelogramm den verlangten Winkel x.

Zusatz. Folglich kann jedes schiefwinkelige Parallelogramm in ein Rechteck (wenn x = R) und jedes Rechteck (wenn ∠DAB = R) in ein Parallelogramm mit einem gegebenen Winkel verwandelt werden.

§. 119.

Aufgabe. Ein gegebenes Parallelogramm in ein anderes mit einem gegebenen Winkel und mit einer gegebenen Seite zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandle zuerst das gegebene Parallelogramm in ein anderes, das den gegebenen Winkel hat (nach voriger Aufgabe) und dieses so erhaltene Parallelogramm sey FEHD (Fig. 115.). Verlängert man DH, so daß die Verlängerung HC = der gegebenen Seite ist, zieht CE und durchschneidet die Verlängerung dieser Linie durch die rückwärts verlängerte DF in A, vollendet das Parallelogramm ABCD, zieht FG, HK, so ist KEGB das verlangte Parallelogramm.

Beweis. FEHD = KEGB (§. 106.); auch hat Letzteres den verlangten Winkel und die verlangte Seite.

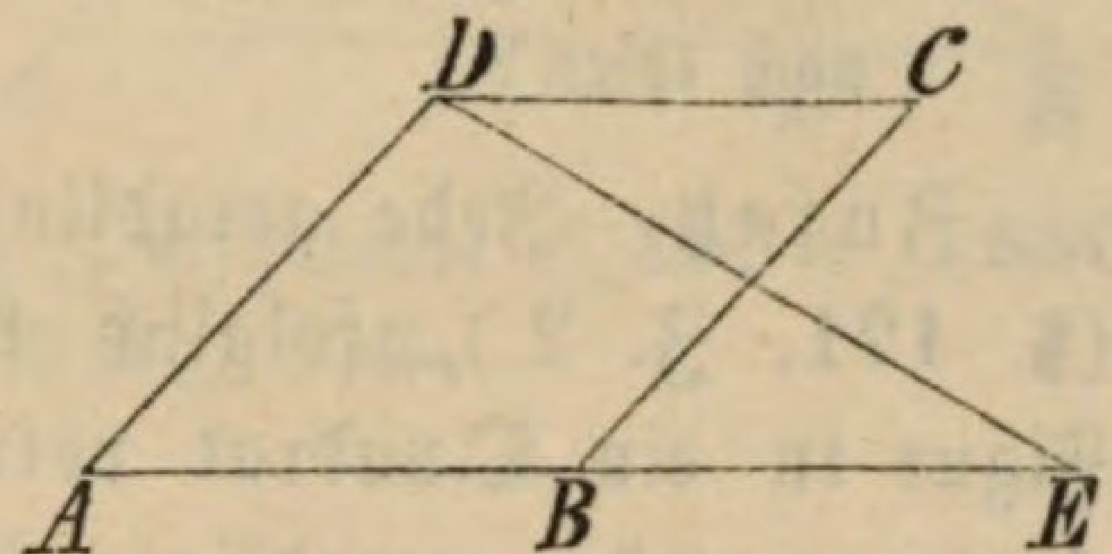
Zusatz 1. Jedes schiefwinkelige Parallelogramm kann daher in ein Rechteck (wenn der gegebene Winkel = R ist) mit einer gegebenen Seite verwandelt werden.

Zusatz 2. Weil aber Rechtecke, die eine Seite gleich haben, sich zu einem Rechteck zusammenfügen lassen, so kann der Flächenraum mehrerer schiefwinkeliger Parallelogramme in ein Rechteck dadurch verwandelt werden, daß

diese Parallelogramme in Rechtecke mit einer gleichen Seite verwandelt und diese in ein Rechteck zusammengefügt werden.

§. 120.

Fig. 131.



Aufgabe. Ein gegebenes Parallelogramm in ein Dreieck zu verwandeln.

Aufgabe. Mache (Fig. 131.) BE = AB, ziehe DE, so ist △ADE = Parallelogramm ABCD.

Beweis. Siehe §. 101. Z. 2.

§. 121.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln.

Auflösung. Halbire (Fig. 131.) AE in B, ziehe BC || AD und DC || AB, so ist △ADE = Parallelogramm ABCD. (§. 101. Z. 2.)

Zusatz 1. Folglich kann jedes Dreieck in ein Rechteck und dann auch in ein Rechteck mit einer gegebenen Seite verwandelt werden; daher können auch die Flächenräume mehrerer Dreiecke durch den Flächenraum eines Rechtecks ausgedrückt werden.

Zusatz 2. Weil jede geradlinige Figur durch Diagonalen sich in lauter Dreiecke zerlegen läßt, diese aber in ein Rechteck verwandelt werden können, so läßt sich auch jede geradlinige Figur in ein Rechteck verwandeln.

§. 122.

Aufgabe. Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Es seyen die beiden zusammenstoßenden Seiten des gegebenen Rechtecks AB und CB. Man construire über AB der Summe dieser Seiten als über einem Durchmesser einen Halb-

kreis (Fig. 69.) und errichte im Punkt C eine Senkrechte CD, welche die Peripherie in D trifft, so ist CD die Seite des verlangten Quadrats.

Beweis. Es ist AC:CD = CD:CB (§. 71. II.)
oder $CD^2 = AC.BC$.

Wie läßt sich diese Aufgabe durch Hilfe des §. 71. III. auch noch lösen?

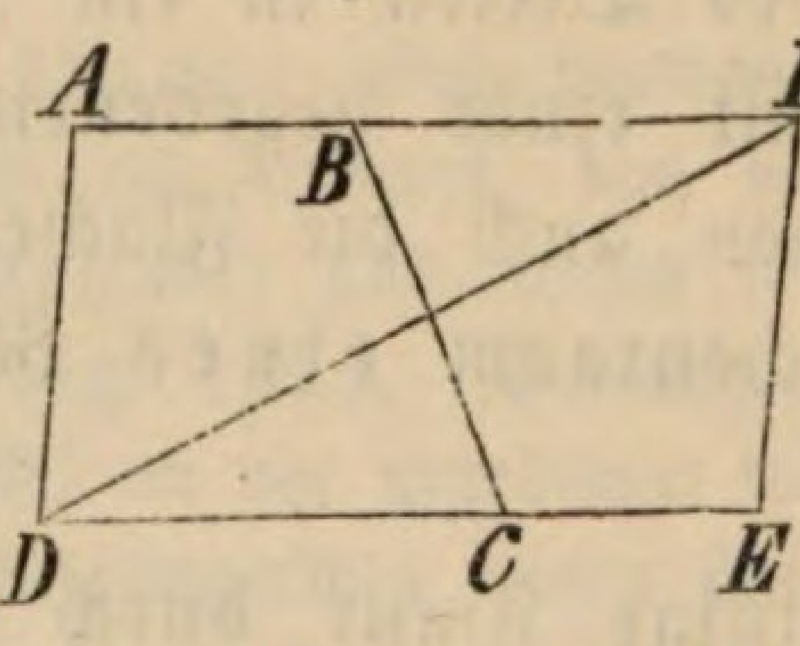
Zusatz. Jede geradlinige Figur kann in ein Rechteck (§. 121. Z. 2.), folglich kann jetzt auch jede geradlinige Figur in ein Quadrat verwandelt werden, oder der Flächenraum jeder geradlinigen Figur läßt sich quadriren, d. h. es läßt sich ein Quadrat construiren, dessen Flächenraum dem irgend einer gegebenen geradlinigen Figur gleich ist.

§. 123.

Aufgabe. Ein gegebenes Trapez in ein Dreieck zu verwandeln.

Auflösung. Es sey (Fig. 132.) ABCD das gegebene Trapez, in welchem AB || DC. Man verlängere die beiden parallelen Seiten AB, DC, so daß BF = DC und CE = AB wird, ziehe FE und DF, so ist DFE oder ADF das verlangte Dreieck.

Fig. 132.



Beweis. AF ⋕ DE, folglich (§. 84. Z. 3.) ADEF ein Parallelogramm; mithin △DFE = ½ ADEF (§. 101. Z. 3.). Es ist aber ABCD = ½ ADEF (weil ABCD = CEFB), daher △DFE = ABCD.

Zusatz. Würde man DE halbiren und im Halbirungspunkte zu AD eine Parallele ziehen, so würde durch diese Linie das Parallelogramm ADEF halbirt, und jede dieser Hälften würde ebenfalls dem Trapez ABCD gleich seyn.

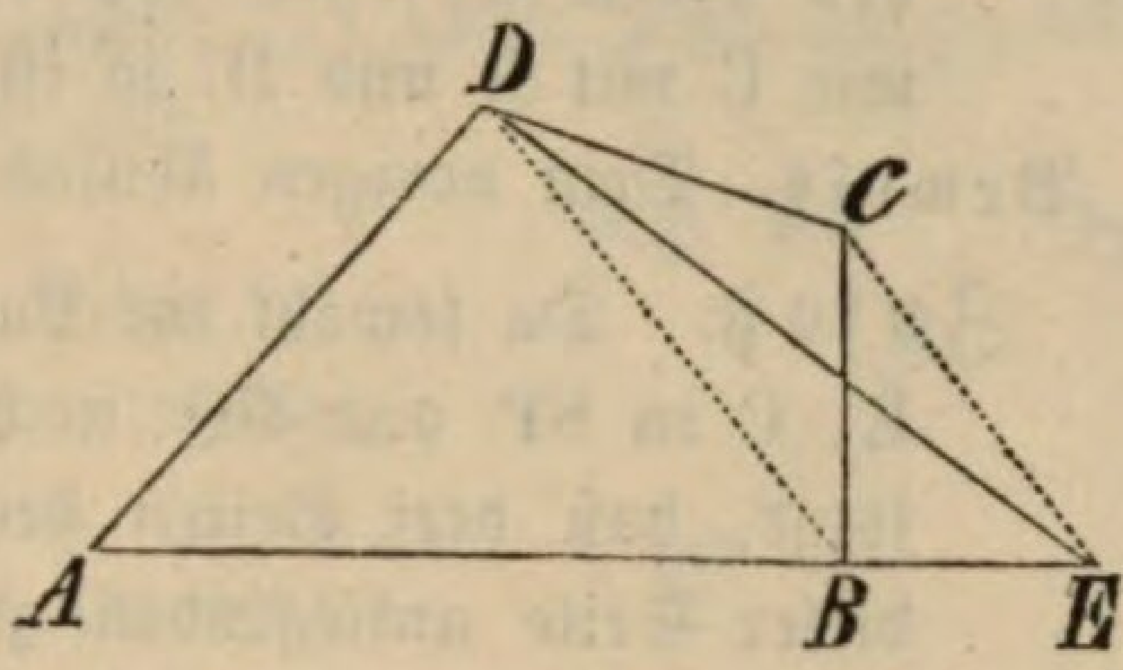
Auf diese Weise wäre ein Trapez in ein Parallelogramm zu verwandeln.

§. 124.

Aufgabe. Ein Trapezoid in ein Dreieck zu verwandeln.

Auflösung. Das zu verwandelnde Trapezoid sey ABCD (Fig 133.). Man ziehe DB, CE || DB und durchschneide CE durch die Verlängerung von AB in E; zieht man DE, so ist ADE das verlangte Dreieck.

Fig. 133.

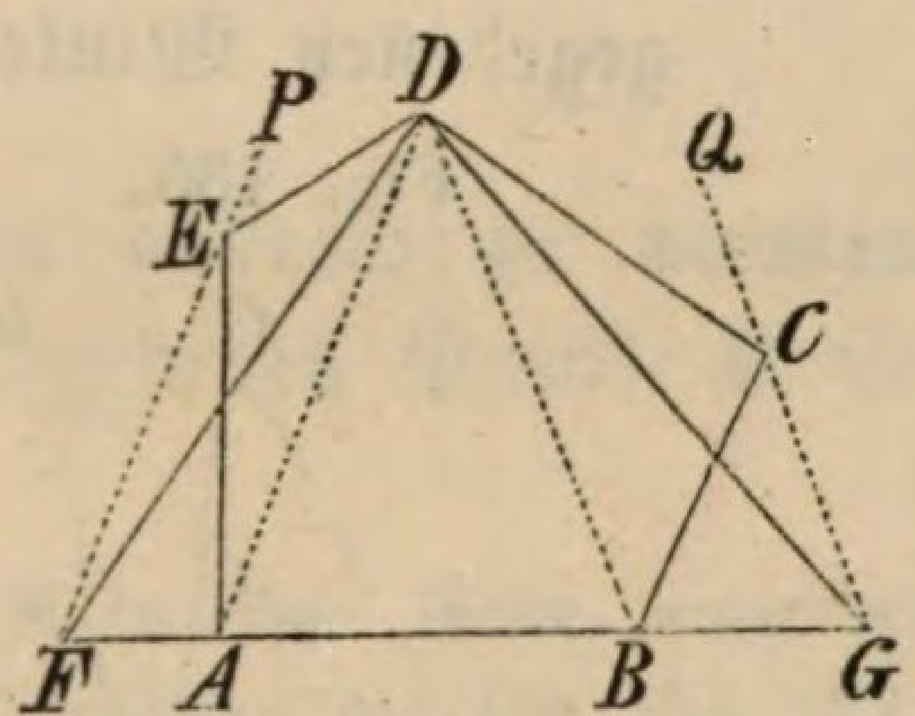


Beweis. △DBC = △DBE (§. 101. Z. 4.); daher △ADB + △DBC = △ADB + △DBE oder ABCD = △ADE.

§. 125.

Aufgabe. Ein gegebenes Fünfeck in ein Dreieck zu verwandeln.

Fig. 134.



Auflösung. Es sey ABCDE (Fig. 134.) das zu verwandelnde Fünfeck. Ziehe die beiden Diagonalen DA, DB; EF || DA und CG || DB; verlängere AB bis die Durchschnitte F, G erfolgen; ziehe DF, DG, so ist △FDG das verlangte.

Beweis. Dem vorigen ähnlich.

Zusatz. Durch ein ganz ähnliches Verfahren, nämlich indem man immer der Figur eine Ecke um die andere wegnimmt, kann jedes nEck in ein (n—1) Eck und dieses wiederum in ein (n—2) Eck ꝛc. und endlich in ein Dreieck verwandelt werden.

Folglich läßt sich jedes nEck in ein Dreieck verwandeln; wird dieses Dreieck in ein Quadrat verwandelt, so ist das gegebene nEck selbst quadrirt.

§. 126.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck FDG in ein Fünfeck zu verwandeln. (Fig. 134.)

Auflösung. In der Grundlinie FG nehme man beliebig zwei Punkte A, B an und ziehe AD, BD; durch F lege man FP || AD und durch G, GQ || BD; nehme in FP den Punkt E und in GQ

den Punkt C willkürlich an und verbinde E mit A und D, sowie C mit B und D, so ist ABCDE das gesuchte Fünfeck.

Beweis. Dem vorigen ähnlich.

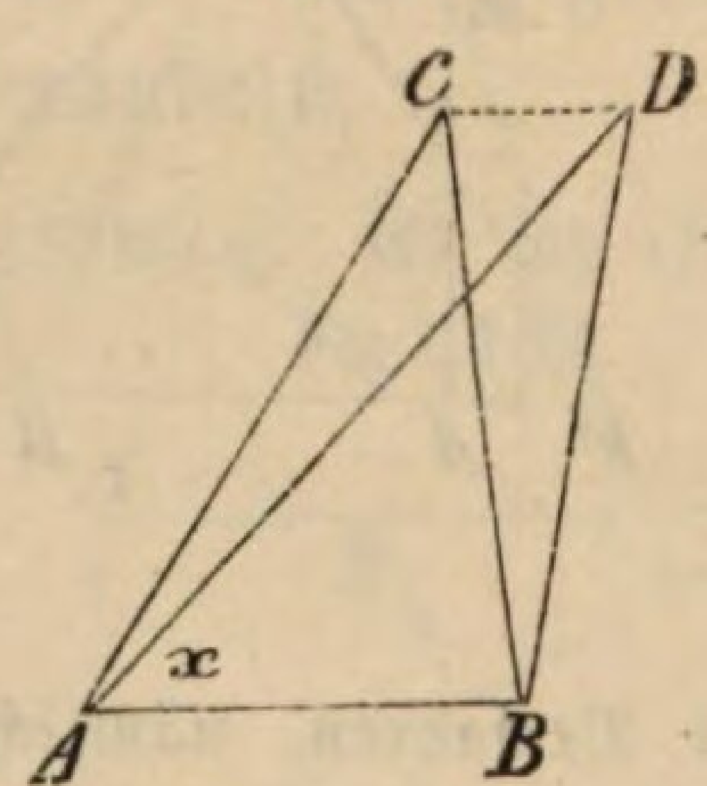
Zusatz. Da sowohl die Punkte A, B in FG, als auch die Punkte E, C in FP und GQ nach Belieben angenommen wurden, so folgt, daß drei Seiten des Fünfecks, oder eine Seite und die dieser Seite anliegenden zwei Winkel eine gegebene Größe haben können;

daher kann jedes Dreieck in ein Fünfeck, welches entweder drei gegebene Seiten oder eine gegebene Seite mit den zwei gegebenen anliegenden Winkeln enthält, verwandelt werden.

§. 127.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck in ein anderes mit einem gegebenen Winkel an der Grundlinie zu verwandeln.

Fig. 135.



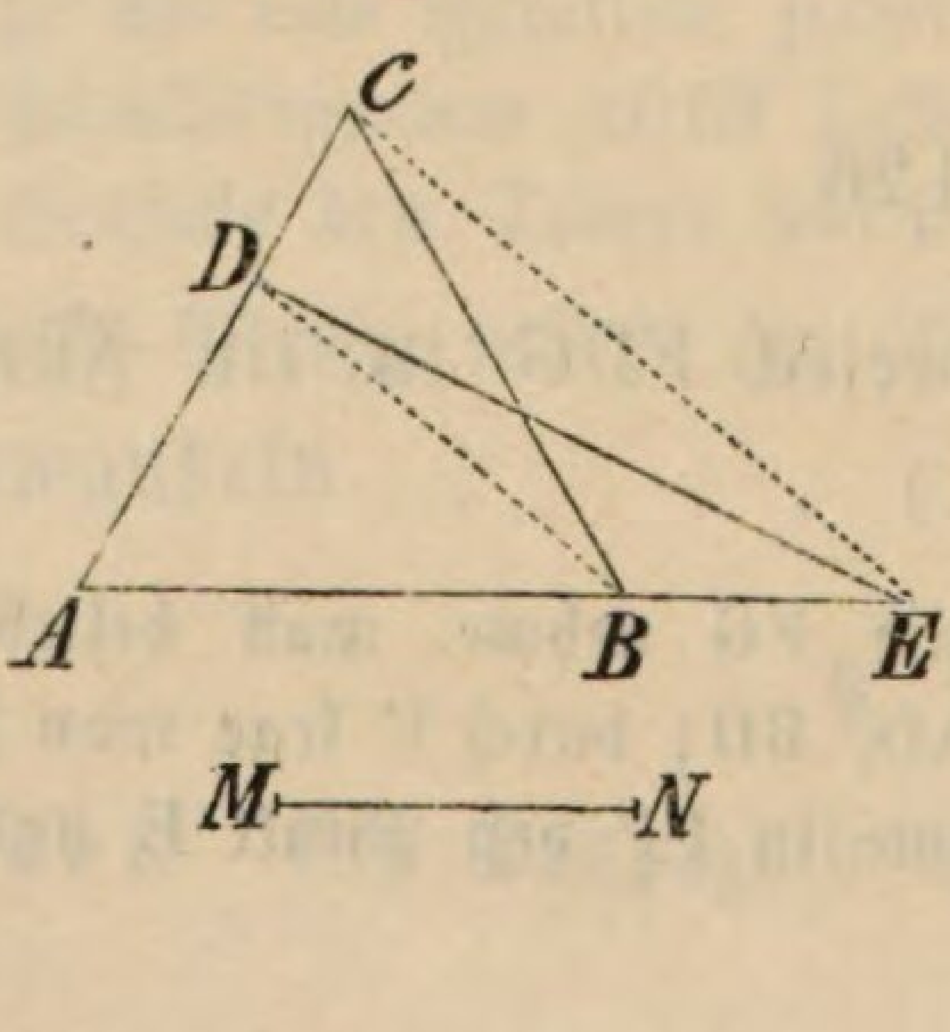
Auflösung. In Figur 135 ist CD || AB, daher $\triangle ABC = \triangle ABD$ (§. 101. Z. 4.). Ist nun $\triangle ABC$ das gegebene und $\angle x$ der gegebene, so ist $\triangle ABD$ das gesuchte.

Zusatz. Also kann auch jedes Dreieck in ein rechtwinkeliges verwandelt werden.

§. 128.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck in ein anderes mit einer gegebenen Seite zu verwandeln.

Fig. 136.

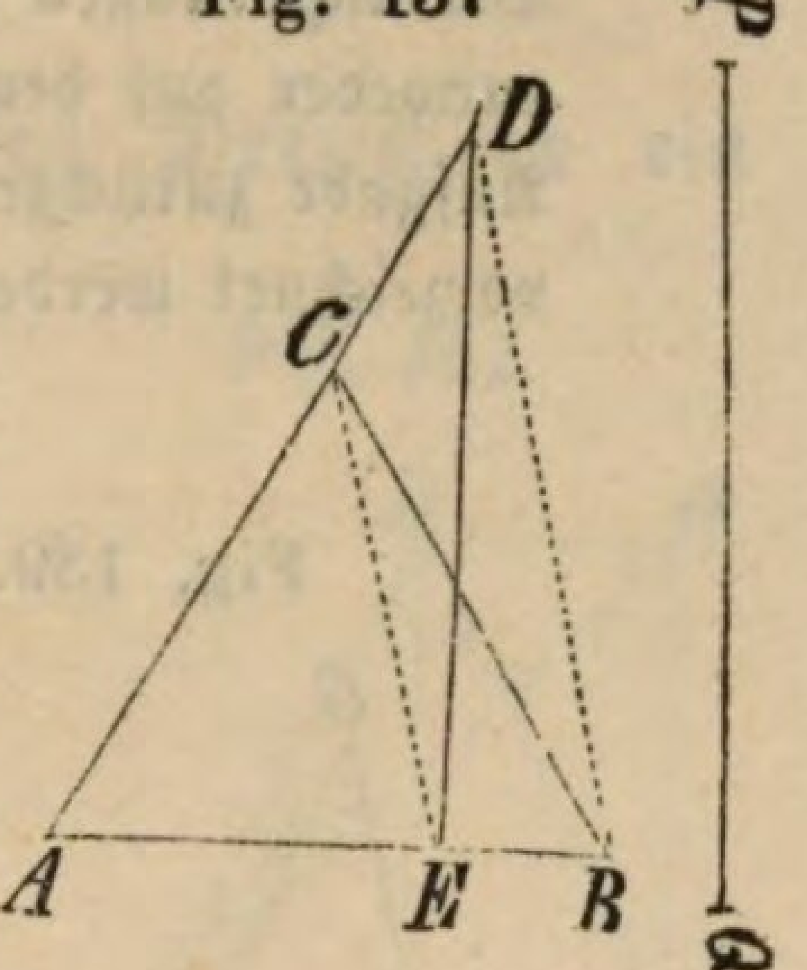


Auflösung. Erster Fall. (Fig. 136.) Die gegebene Seite MN ist kleiner als eine Seite des gegebenen Dreiecks, nämlich es sey $MN < AC$.

Man mache $AD = MN$, ziehe DB und durch C die Gerade CE || DB, schneide CE durch die verlängerte AB in E, ziehe DE, so ist AED das verlangte Dreieck.

Beweis. $\triangle DBC = \triangle DBE$ (§. 101. Z. 4.), daher $\triangle ADB + \triangle DBC = \triangle ADB + \triangle DBE$, oder $\triangle ABC = \triangle AED$. Auch hat $\triangle AED$ die verlangte Seite, denn $AD = MN$.

Fig. 137



Zweiter Fall. Die gegebene Seite PQ ist größer als eine Seite des Dreiecks, nämlich $PQ > AC$. (Fig. 137.)

Man verlängere AC, so daß $AD = PQ$ wird; ziehe DB und $CE \parallel DB$, bis AB in E getroffen ist; wird nun D und E verbunden, so ist ADE das gesuchte Dreieck.

Beweis. $\triangle CED = \triangle CEB$ (§. 101. Z. 4.); daher $\triangle ACE + \triangle CED = \triangle ACE + \triangle CEB$ oder $\triangle AED = \triangle ABC$. Auch ist $AD = PQ =$ der gegebenen Seite.

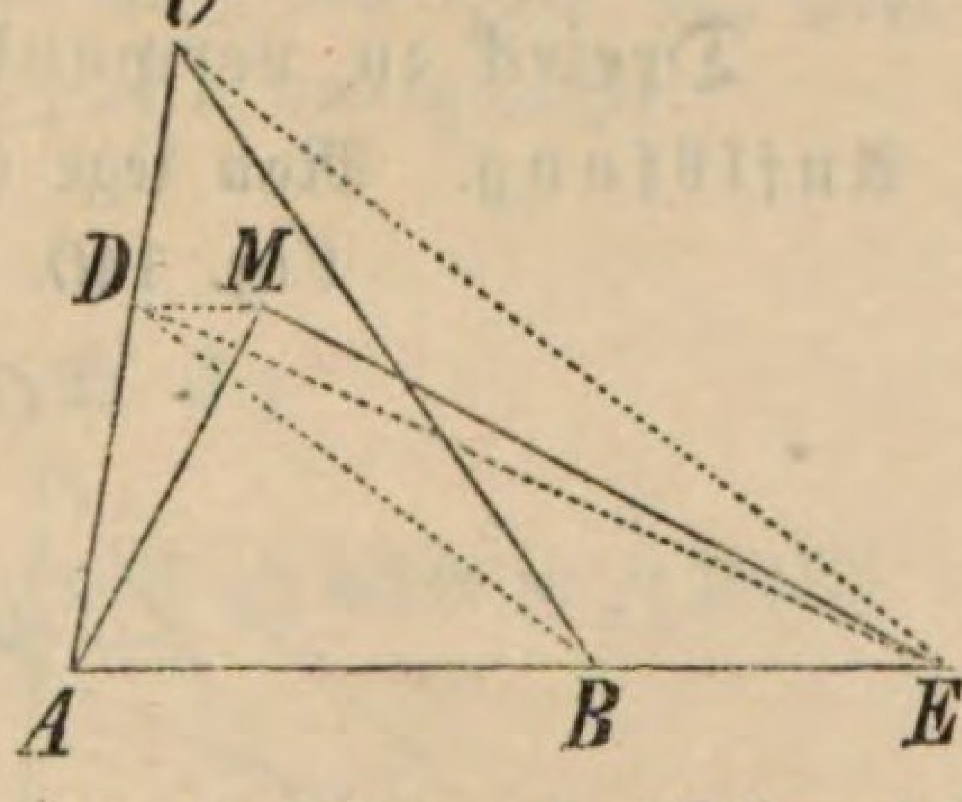
§. 129.

Aufgabe. Ein Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, dessen Spitze in einem gegebenen Punkte M liegen soll.

Auflösung. Soll der gegebene Punkt M in einer Seite, etwa wie D in AC (Fig. 136.), oder in deren Verlängerung AD (Fig. 137.) liegen, so ist die Aufgabe mit der vorigen gleichlautend.

Läge aber der gegebene Punkt M außerhalb jeder Seite des Dreiecks oder ihren Verlängerungen, so kann er nur entweder innerhalb der Fläche des Dreiecks oder außerhalb derselben liegen.

Fig. 138.

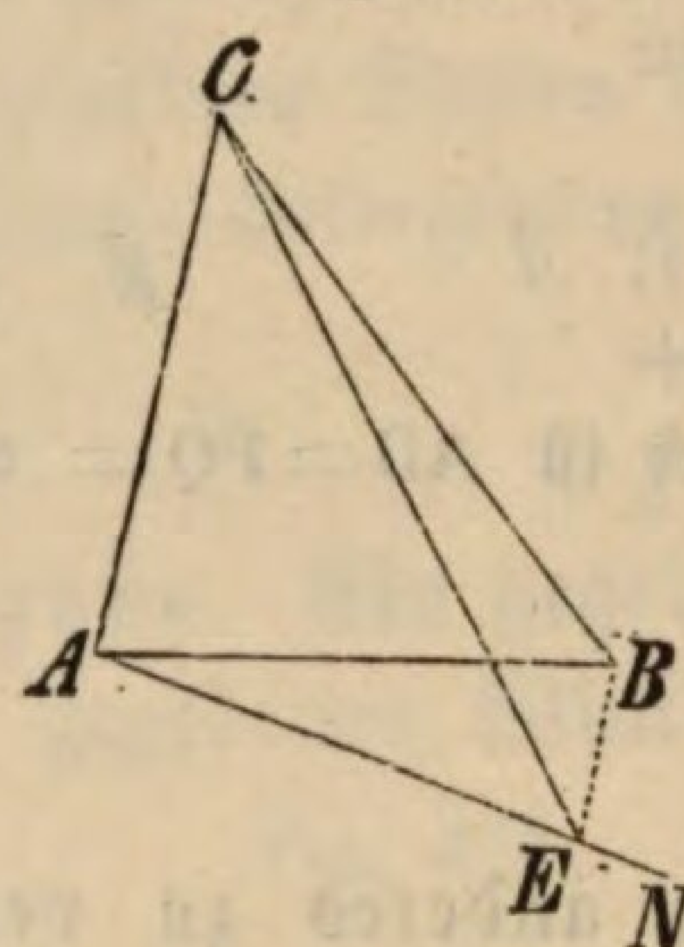


Liegt M innerhalb der Fläche des Dreiecks ABC (Fig. 138.) so ziehe durch M zu irgend einer Seite, etwa zu AB, eine Parallele; diese wird die beiden andern Seiten, AC, BC, in den Punkten D, D' schneiden. Verwandelt man nun $\triangle ABC$ so, daß dessen Spitze in D oder D' fällt (nach §. 128. ersten Fall), so ist $\triangle AED = \triangle ABC$; zieht man AM, ME, so ist auch $\triangle AED = \triangle AEM$ (§. 101. Z. 4.); daher $\triangle AEM = \triangle ABC$; also $\triangle AEM$ das verlangte.

Liegt M außerhalb des Dreiecks ABC, so werden, wenn man durch M zu einer Seite des gegebenen Dreiecks eine Parallele zieht, die beiden andern Seiten entweder selbst oder in ihren Verlängerungen geschnitten; also wird die Aufgabe dadurch selbst entweder auf den ersten oder auf den zweiten Fall der vorigen Aufgabe zurückgeführt und nun kann das verlangte Dreieck leicht verzeichnet werden.

§. 130.

Fig. 139.



Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, dessen Grundlinie in einer gegebenen Richtung liegen soll.

Auflösung. Die Richtung der Grundlinie soll AN seyn (Fig. 139.); ziehe BE || AC und CE, so ist ACE das verlangte Dreieck.

Beweis. △ACE = △ACB. (§. 101. Z. 4.)

§. 131.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck in ein anderes mit einer gegebenen Höhe zu verwandeln.

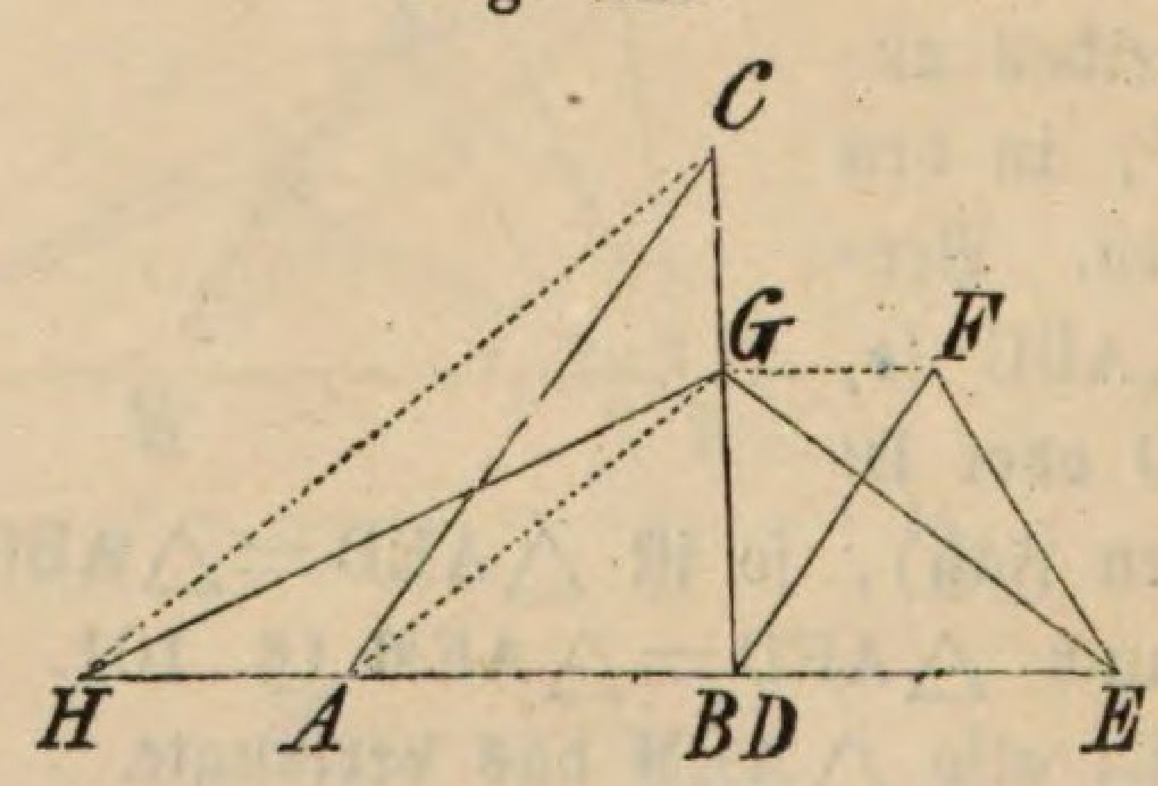
Auflösung. Die Aufgabe läßt sich leicht auf die Aufgabe des §. 129. zurückführen.

§. 132.

Aufgabe. Zwei Dreiecke von ungleicher Höhe in ein Dreieck zu verwandeln.

Auflösung. Man lege (Fig. 140) die beiden gegebenen Dreiecke ABC, DEF so an einander, daß ihre beiden Grundlinien eine Gerade AE ausmachen; ziehe durch die Spitze F des kleinern Dreiecks eine zur Grundlinie Parallele, so wird die eine Seite BC des größern Dreiecks in G geschnitten; zieht man GE, so ist

Fig. 140.



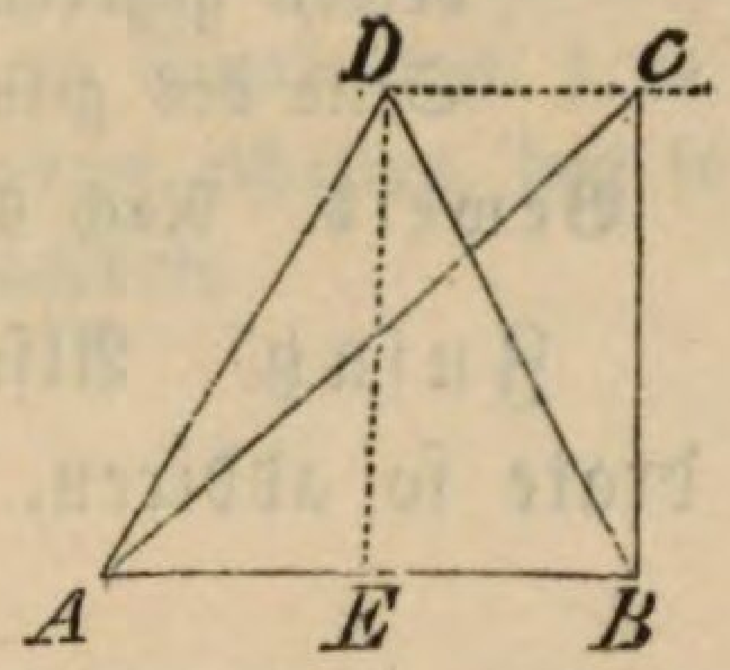
ACGE = △ABC + △DEF. Verwandelt man nun (nach §. 124.) ACGE in das Dreieck HGE, so ist HGE das gesuchte Dreieck.

Beweis. Leicht.

§. 133.

Aufgabe. Ein gegebenes ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkeliges zu verwandeln.

Fig. 141.



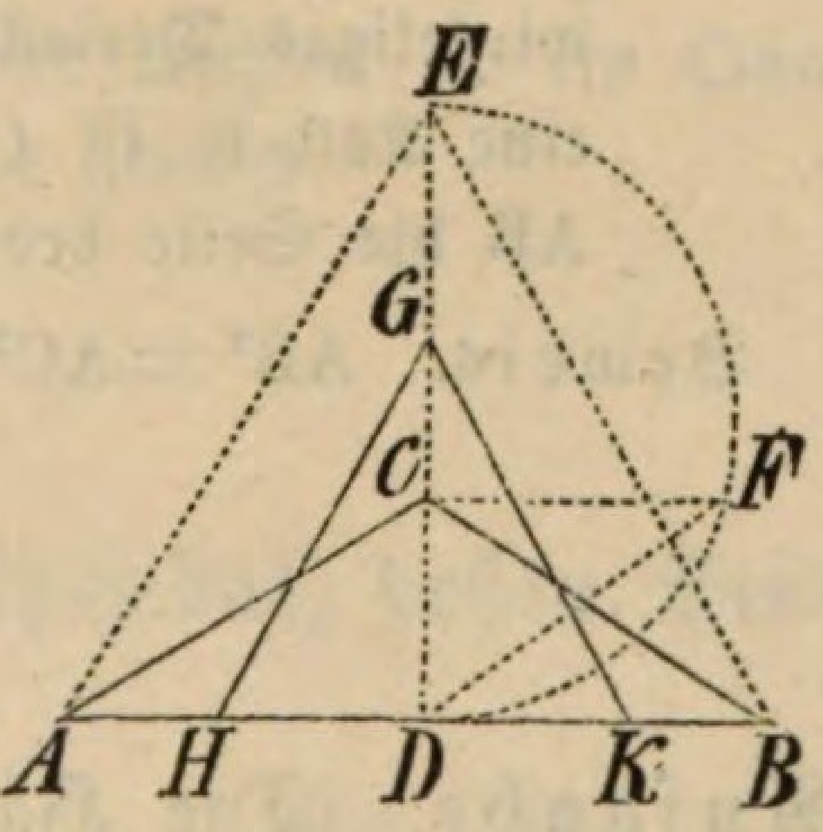
Auflösung. Von dem gegebenen Dreieck ABC (Fig. 141.) halbire man die Seite, welche man zur Grundlinie machen will, hier AB, in E, ziehe ED ⊥ AB und lege durch C eine zur Grundlinie parallele Gerade, welche die ED in D trifft; zieht man AD, BD, so ist ABD das verlangte gleichschenkelige Dreieck.

Beweis. Vergl. §. 57. II.

§. 134.

Aufgabe. Ein gegebenes ungleichseitiges Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Fig. 142.



Auflösung. Man verwandle zuerst das ungleichseitige Dreieck in ein gleichschenkeliges (§. 133.) und dieses sey △ABC (Fig. 142.) Ueber der Grundlinie AB construire man ein gleichseitiges Dreieck ABE; ziehe ED ⊥ AB, beschreibe über ED, als über einem Durchmesser, einen Halbkreis, errichte CF ⊥ ED, verbinde den Durchschnittspunkt F dieser Senkrechten mit D und trage DG = DF ab; zieht man GH ∥ EA und GK ∥ EB, so ist △GHK das gesuchte.

Beweis. Nach §. 71. Z. II. ist

CD : DF = DF : ED

und weil DG = DF (V. D. C.)

so ist CD : DG = DG : ED

Es ist aber auch DG : DH = ED : AD (weil △GHD ∾ △EAD)

folglich CD : DH = DG : AD

oder CD . AD = DG . DH

d. h. △ABC = △GHK (§. 101. Z. 3.)

Es ist aber auch △GHK ∾ △EAB (§. 66. Z. 6.); mithin △GHK, wie verlangt, ein gleichseitiges Dreieck.

§. 135.

Aufgabe. Die Summe zweier gegebener Quadrate in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Man construire ein rechtwinkeliges Dreieck ABC (Fig. 124.), in welchem die Katheten AB, BC die Seiten der beiden gegebenen Quadrate sind, so ist die Hypotenuse AC die Seite des gesuchten Quadrats.

Beweis. Nach §. 110. ist $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Zusatz. Also lassen sich die Flächenräume zweier Quadrate so addiren, daß ihre Summe wieder ein Quadrat ist.

§. 136.

Aufgabe. Den Unterschied zweier gegebener Quadrate in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Die Seite des gegebenen größern Quadrats sey AC, die Seite des kleinern BC; man construire (Fig. 124.) ein rechtwinkeliges Dreieck, in welchem AC die Hypotenuse und BC die eine Kathete ist (§. 78. 2te Aufg.); so ist die andere Kathete AB die Seite des gesuchten Quadrats.

Beweis. $AB^2 = AC^2 - BC^2$ (§. 110. Z. 2.)

§. 137.

Aufgabe. Die Hälfte eines gegebenen Quadrats in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung I. Wenn man eine Seite des Quadrats halbirt und im Halbirungspunkt eine Senkrechte errichtet, so wird das Quadrat in zwei gleiche Rechtecke getheilt. Verwandelt man nun ein solches Rechteck in ein Quadrat (nach §. 122.), so hat man der Aufgabe genügt.

Auflösung II. Man construire ein gleichschenkeliges und rechtwinkeliges Dreieck, in welchem die Hypotenuse die Seite des gegebenen Quadrats ist, so ist jede Kathete die Seite des gesuchten Quadrats.

Beweis. Vergl. §. 110. Z. 3.

§. 138.

Aufgabe. Die Flächenräume dreier, vierer, fünfer 2c. gegebener Quadrate in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandle die gegebenen beiden ersten Quadrate in ein Quadrat (§. 135. Z. 1.); dieses und das dritte gegebene Quadrat wieder in ein Quadrat, das so erhaltene Quadrat und das vierte gegebene Quadrat abermals in ein Quadrat u. s. w. Auf diese Weise wird man endlich ein Quadrat erhalten, das so groß ist als die Summe der gegebenen Quadrate.

§. 139.

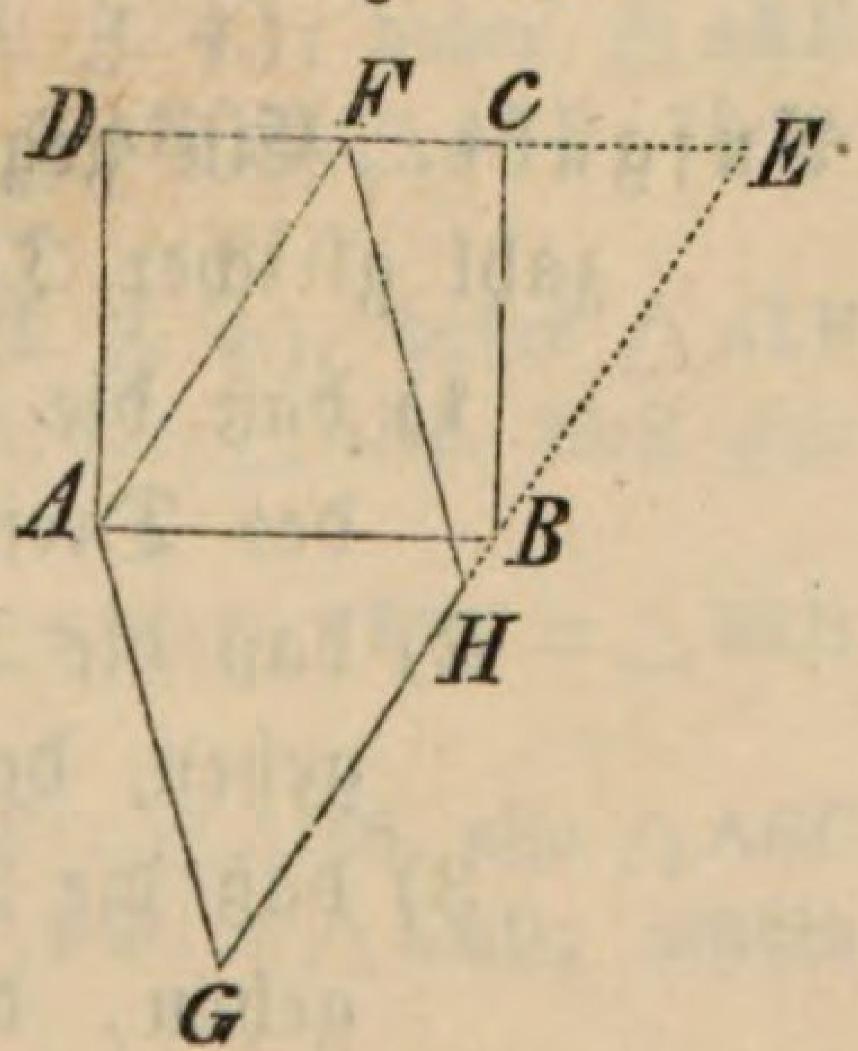
Aufgabe. Den dreifachen, vierfachen, fünffachen 2c. Flächenraum eines gegebenen Quadrats in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Angenommen, es wäre der nfache Flächenraum eines Quadrats, dessen Seite = a ist, in ein Quadrat zu verwandeln, so betrachte man diese Flächenräume als ein Rechteck, dessen Seiten a, a. n sind; verwandelt man dieses Rechteck in ein Quadrat (§. 122.), so hat man der Aufgabe genügt.

§. 140.

Aufgabe. Ein Quadrat in einen Rhombus, dessen Seite gegeben ist, zu verwandeln.

Fig. 143.



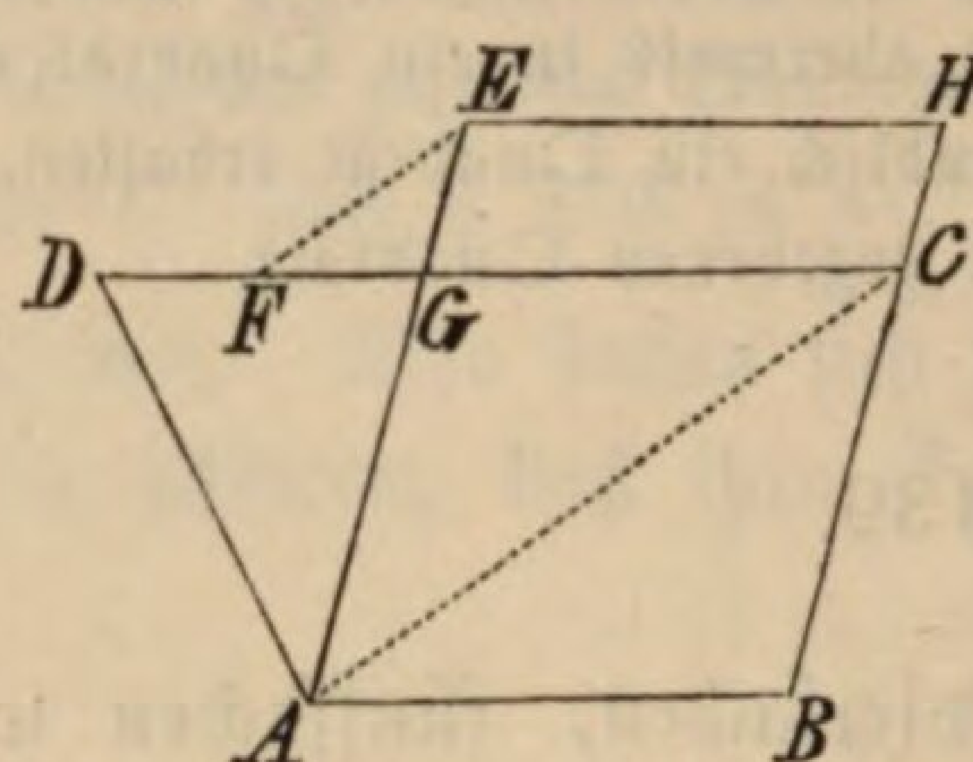
Auflösung. Man construire (Fig. 143.) ein dem gegebenen Quadrate gleiches Parallelogramm ABEF, dessen Grundlinie AB die Seite dieses Quadrats ABCD, und dessen Seite AF die gegebene Seite des gesuchten Rhombus ist. Verlängert man EB und durchschneidet diese Verlängerung von A aus mit einem Halbmesser AF in G und zieht FH || AG, so ist AGHF der gesuchte Rhombus.

Beweis. Leicht.

§. 141.

Aufgabe. Ein Trapez in ein Parallelogramm
a) über der kleinern,
b) über der größern von den parallelen Seiten
zu verwandeln.

Fig. 144.



Auflösung a. Es sey (Fig. 144.) ABCD das zu verwandelnde Trapez. Man ziehe AE || BC, halbire die Entfernung des so eben erhaltenen Durchschnittspunkts G von D in F, ziehe FE || zur Diagonale AC; durch den erhaltenen Durchschnittspunkt E ziehe EH || AB und durchschneide EH durch die Verlängerung von BC in H, so ist ABHE das verlangte Parallelogramm.

Wie wird der Beweis geführt?

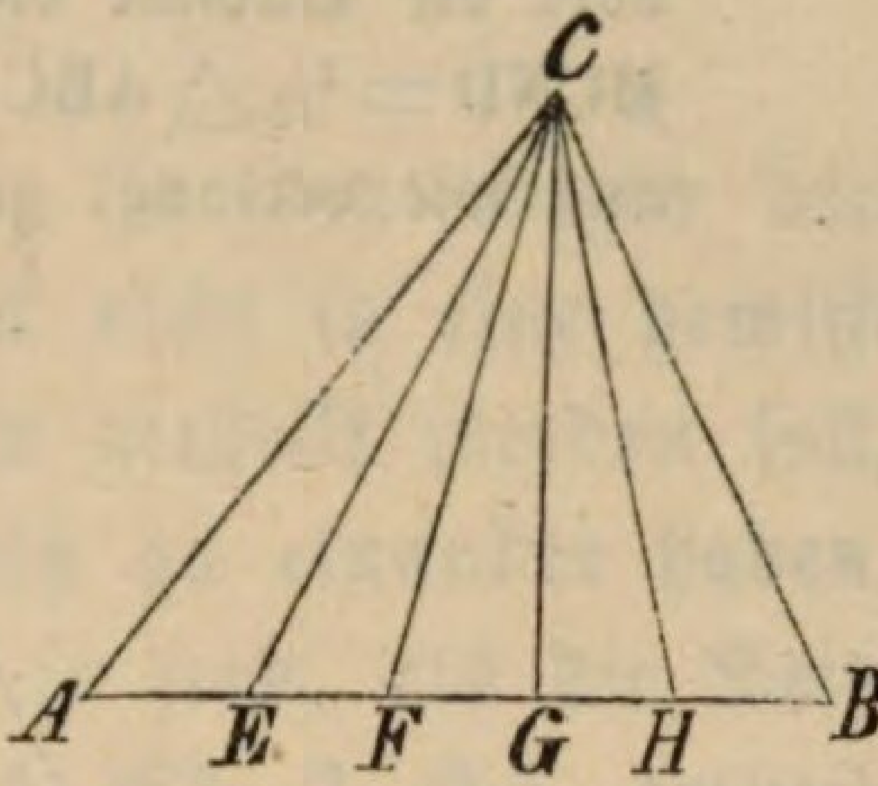
Auflösung b. Der vorigen ähnlich.

C. Theilung des Flächenraums.

§. 142.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen und zwar
1) daß die Theilungslinien von einer Winkelspitze des Dreiecks ausgehen;
2) daß die Theilungslinien von einem Punkte ausgehen, der in einer Dreiecksseite liegt;
3) daß die Theilungslinien von einem Punkte ausgehen, der innerhalb der Fläche des Dreiecks liegt.

Fig. 145.

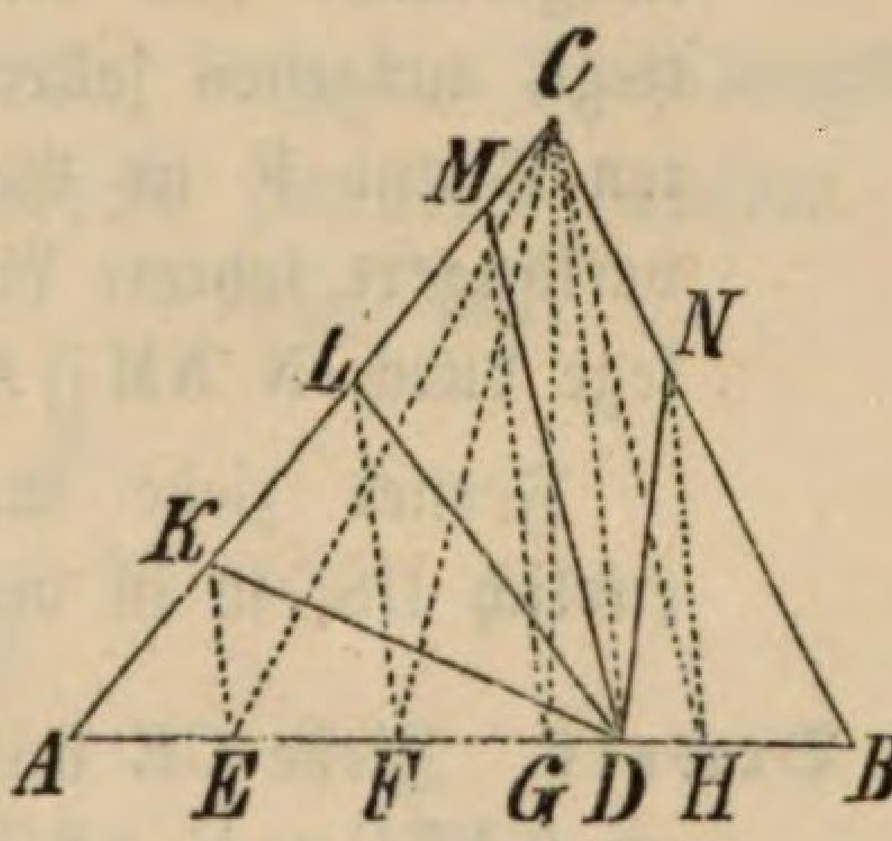


Auflösung. I. Theil. Es sey das Dreieck ABC (Fig. 145.) in m (5) gleiche Theile zu theilen, die Theilungslinien sollen von der Winkelspitze C ausgehen; so theile man die der Spitze C gegenüberliegende Seite AB in die verlangten m (5) Theile und ziehe durch die Theilungspunkte gerade Linien nach C, so ist die Aufgabe gelöst.

Beweis. △AEC = △EFC = △FGC = △GHC = △HBC (§. 101. Z. 4.), folglich △ABC in die verlangten m (5) gleiche Theile getheilt.

Auflösung. II. Theil. Ist das Dreieck ABC (Fig. 146.) in m (5) gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien vom Punkte D, der in der Seite AB liegt, ausgehen, so theile man die Seite AB, auf der der gegebene Punkt D liegt, in den Punkten E, F, G, H in die verlangten m (5) Theile, ziehe CD, und EK || FL || GM || HN || CD, endlich die Geraden KD, LD, MD, ND, so ist das △ABC wie verlangt getheilt.

Fig. 146.



Beweis. Zieht man CE, CF, CG, CH, so ist nach der vorigen Auflösung △ AEC = △ EFC = △ FGC = △ GHC = △ HBC = $^1/_5$ ABC.

Nun ist △KEC = △KED (§. 101. Z. 4.); daher △AKE + △KEC = △AKE = △KED, d. h. △AEC = △AKD, folglich △AKD = $^1/_5$ △ABC.

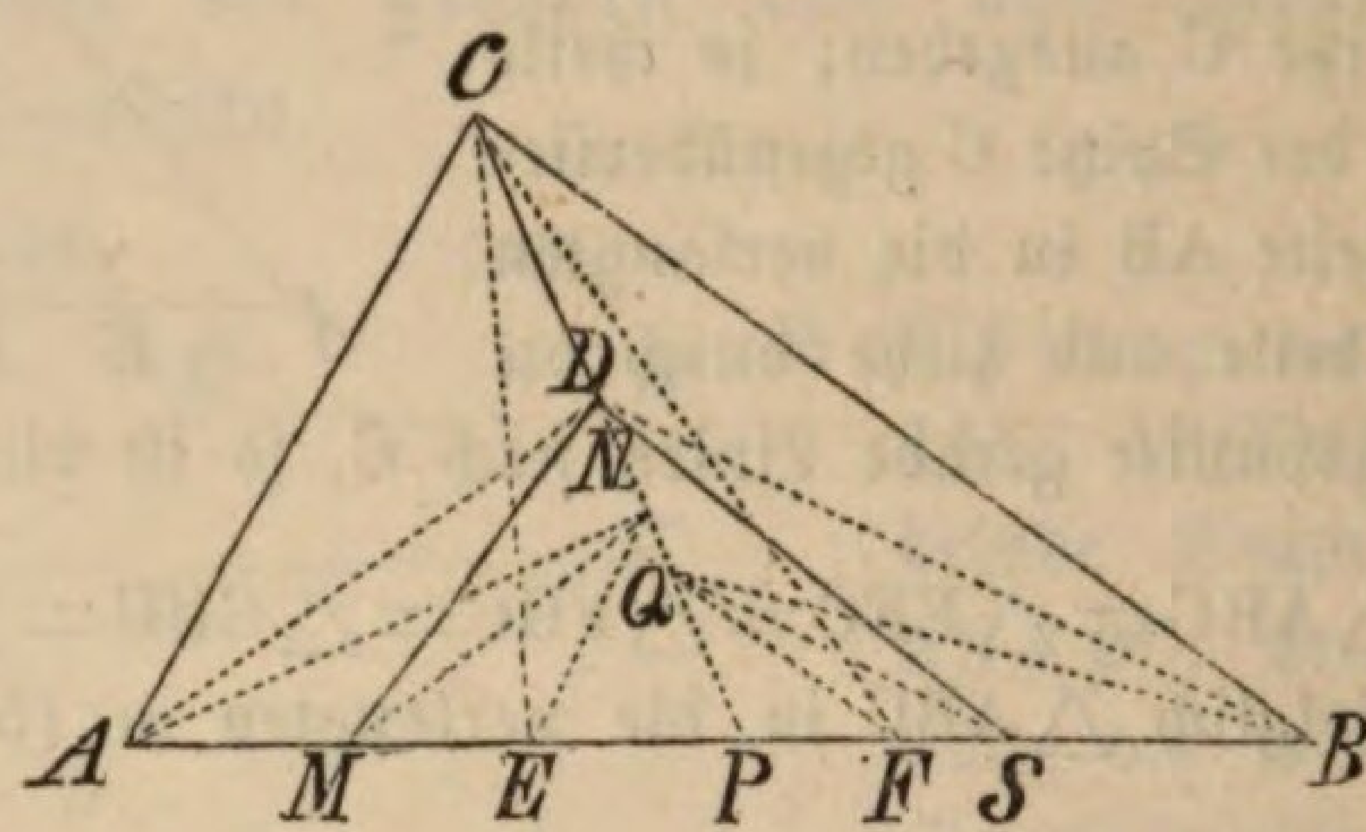
Ferner ist △LFC = △LFD (§. 101. Z. 4.), daher △ALF + △LFC = △ALF + △LFD oder △AFC = △ADL. Weil aber △AEC = △AKD, so ist auch
△AFC − △AEC = △ADL − △AKD, mithin △EFC = △KLD = $^1/_5$ △ABC.

Ebenso läßt sich erweisen, daß △AGC = △ADM, also △AGC − △AFC = △ADM − △ADL oder △FGC = △LMD; mithin △LMD = $^1/_5$ △ABC.

Auch ist △BND = △HBC = $^1/_5$ △ABC.

Da nun $\triangle AKD = \triangle KLD = \triangle LMD = \triangle BND = {}^1/_5 \triangle ABC$, oder die Summe dieser 4 Dreiecke $= {}^4/_5 \triangle ABC$, so muß auch $MCND = {}^1/_5 \triangle ABC$ seyn und mithin ist $\triangle ACB$ vom Punkt D aus wie verlangt getheilt.

Fig. 147.



Auflösung. III. Theil. Wenn das Dreieck ABC (Fig. 147.) in m(3) gleiche Theile so getheilt werden soll, daß die Theilungslinien von einem Punkt D, der innerhalb des Dreiecks liegt, ausgehen sollen, so theile man eine Seite AB in den Punkten E und F in die verlangten 3 Theile; ziehe AD, CD und verlängere letztere Linie bis AB in P getroffen ist, mache EN || AC, lege durch N NM || AD und ziehe DM.

Ferner ziehe man DB; sodann FQ || BC und QS || DB, endlich DS, so ist die verlangte Theilung geschehen.

Beweis. Ziehe CE und CF, so ist (B. D. C.) $\triangle ACE = \triangle EFC = \triangle FBC = {}^1/_3 ABC$.

Auch ist $\triangle ADM = \triangle ADN$ (§. 101. Z. 4.), wenn man AN zieht,

also auch $\triangle ADC + \triangle ADM = \triangle ADC + \triangle ADN$

folglich $ACDM = \triangle ACN$

Es ist aber $\triangle ACN = \triangle ACE$, weil EN || AC

daher $ACDM = \triangle ACE = {}^1/_3 \triangle ABC$.

Ebenso läßt sich zeigen, daß $BCDS = \triangle BCF = {}^1/_3 \triangle ABC$, folglich muß $\triangle MDS = \triangle ECF = {}^1/_3 \triangle ABC$ seyn.

Wie wird die Aufgabe zu lösen seyn, wenn D nicht im $\triangle CEF$, sondern im $\triangle ACE$ oder BCF liegt?

Zusatz 1. Sollte in der letzten Aufgabe der Punkt D so liegen, daß die zu AC gezogene Parallele EN, die durch D gezogene CP nicht zwischen D und P, sondern zwischen D und C trifft, so muß eine andere Seite als AB

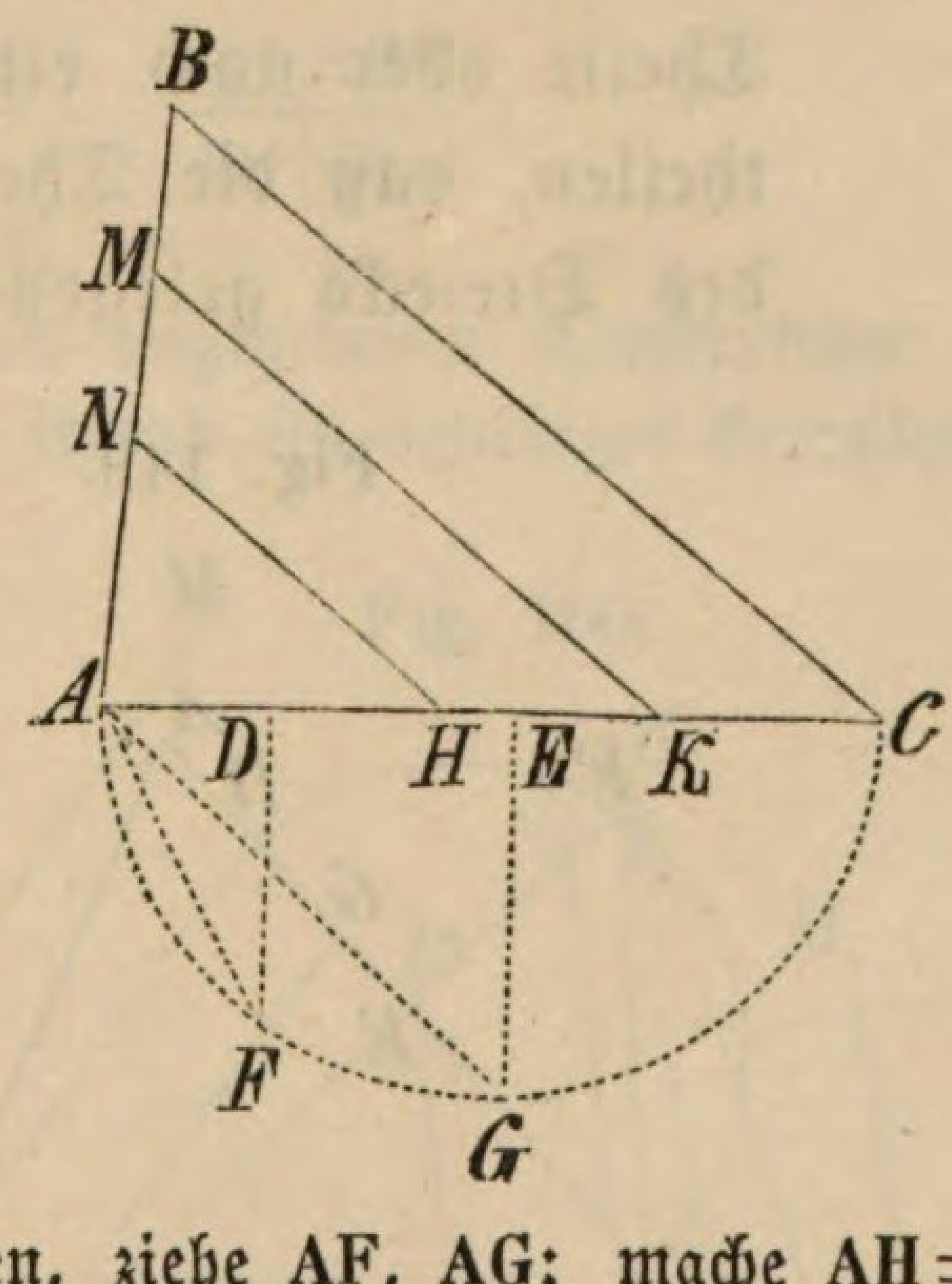
in die verlangte Anzahl gleicher Theile getheilt werden. Warum?

Zusatz 2. Wäre die Bedingung in den obigen drei Aufgaben so gestellt, daß das Dreieck nicht in eine gewisse Anzahl gleicher Theile, sondern so getheilt werden soll, daß die Theile ein gewisses Verhältniß zu einander haben, so ändert dieß die Auflösung nur in so fern, als die Seite AB nach eben diesem Verhältniß (§. 63. Z. 2.) getheilt wird, wie man sich leicht überzeugen kann.

§. 143.

Aufgabe. Ein Dreieck in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile oder nach einem bestimmten Verhältniß in eine gewisse Anzahl Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit einer Seite des Dreiecks parallel laufen.

Fig. 148.



Auflösung. Es sey (Fig. 148.) das △ABC in drei Theile zu theilen, diese Theile sollen sich verhalten = m:n:p, und die Theilungslinien sollen mit BC parallel laufen.

Man theile AC (oder AB) von A aus nach dem gegebenen Verhältniß, nämlich es sey AD:DE:EC = m:n:p Beschreibe über AC einen Halbkreis, errichte in D und E die Senkrechten DF, EG, welche den Halbkreis in F und G treffen, ziehe AF, AG; mache AH = AF und AK = AG und ziehe durch die Punkte H und K die Geraden HN und KM || BC, so ist durch diese Linien das Dreieck ABC nach dem verlangten Verhältniß getheilt.

Beweis. Vermöge der Construction ist

$$AD:AF = AF:AC \quad (\S.\ 71.\ Z.)$$

oder $AD:AH = AH:AC$, daraus

$$1)\ AH^2 = AD.AC$$

Ebenso ist $AE:AG = AG:AC$

oder $AE:AK = AK:AC$, daher

2) $AK^2 = AE.AC$

Da $\triangle ANH \sim \triangle AMK \sim \triangle ABC$ (nach §. 66.), so ist

$\triangle ANH:\triangle AMK:\triangle ABC = AH^2 : AK^2 : AC^2$ (n. §. 104.)

$= AD.AC:AE.AC:AC^2$ (wenn man die Werthe aus 1 und 2 setzt.)

$= AD : AE : AC$

Oder $\triangle ANH:(\triangle AMK - \triangle ANH):(\triangle ABC - \triangle AMK)$

$= AD:(AE - AD):(AC - AE)$

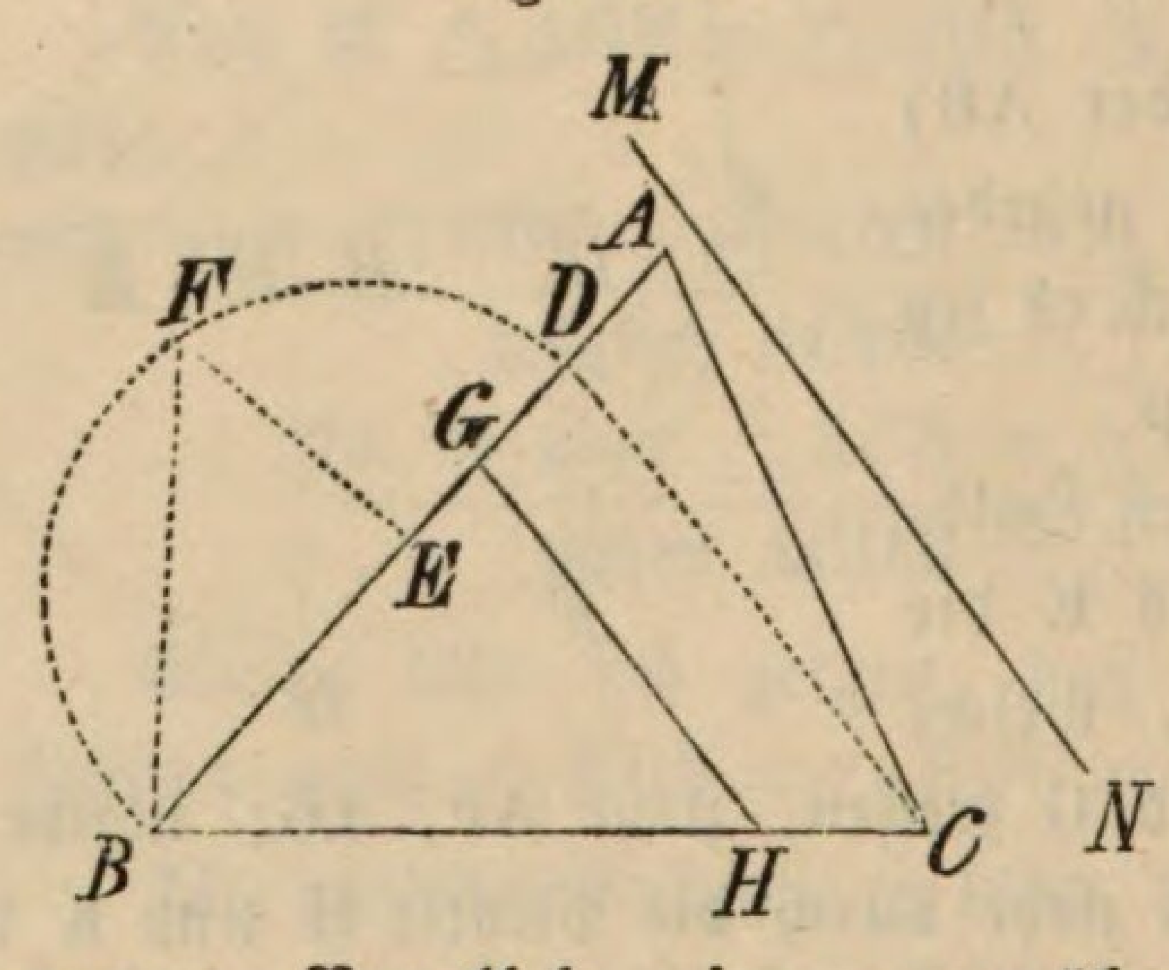
Also $\triangle ANH:MNHK:BMKC = AD:DE:EC$

$= m : n : p.$

§. 144.

Aufgabe. Ein Dreieck in eine gewisse Anzahl gleicher Theile oder nach einem bestimmten Verhältniß so zu theilen, daß die Theilungslinien mit einer außerhalb des Dreiecks gelegenen Geraden parallel laufen.

Fig. 149.



Auflösung. Es sey (Fig. 149.) das Dreieck ABC in 2 gleiche Theile zu theilen, die Theilungslinie soll mit MN parallel laufen.

Man wähle eine Dreiecksecke, welche gegen die gegebene MN so liegt, daß eine durch sie zu MN gezogene Parallele eine gegenüberliegende Seite des Dreiecks trifft; hier ziehe man CD || MN, theile AB im Punkte E in zwei gleiche Theile, beschreibe über BD einen Halbkreis, errichte EF senkrecht auf BD, ziehe BF, mache BG = BF und ziehe GH || DC, so theilt GH, wie verlangt, das Dreieck in 2 gleiche Theile und ist parallel mit MN.

Beweis. Es ist $BG^2 = BE.BD$ (§. 100. Z. 4.), auch ist

$$\triangle BDC : \triangle BGH = BD^2 : BG^2 \quad (104.)$$
$$= BD^2 : BE.BD$$
$$= BD : BE$$

ferner ist $\triangle ABC : \triangle BDC = AB : BD$ (§. 102.)

folglich $\triangle ABC : \triangle BGH = AB : BE$

$$= 2 : 1$$

oder $\triangle BGH = \frac{1}{2} \triangle ABC$; also auch

$$ACHG = \tfrac{1}{2} \triangle ABC.$$

Zusatz. Wäre AB im Punkte E nach irgend einem Verhältniß, etwa $AE : BE = m : n$ getheilt, so wäre in obiger Proportion

$$\triangle ABC : \triangle BGH = AB : BE$$
$$= (m+n) : n,$$

daraus $\triangle BGH = \frac{n.\triangle ABC}{m+n}$

und $ACHG = \triangle ABC - \triangle BGH$

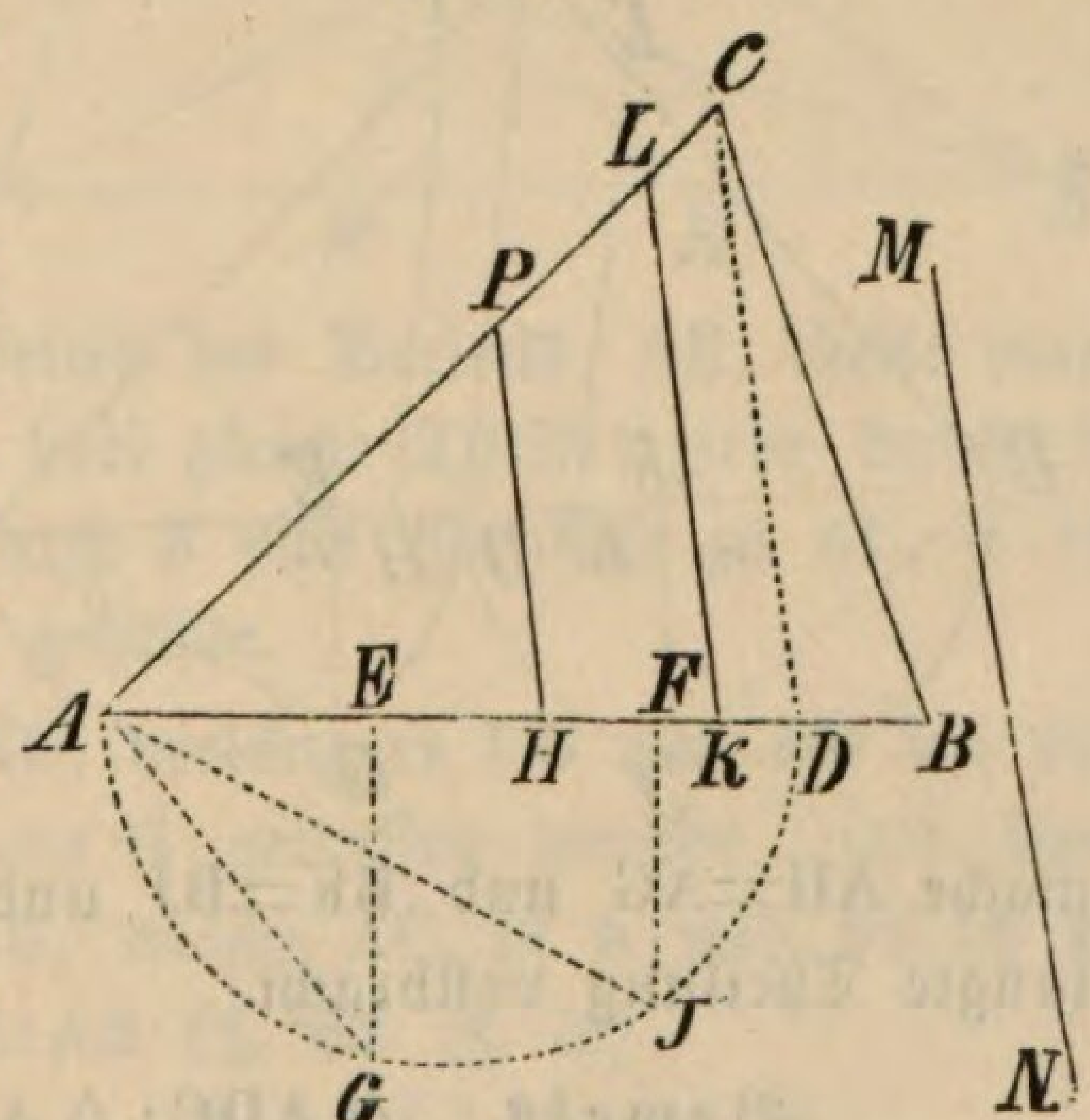
$$= \triangle ABC - \frac{n.\triangle ABC}{m+n}$$
$$= \frac{m\triangle ABC}{m+n}$$

daher $\triangle BGH : ACHG = \frac{m.\triangle ABC}{m+n} : \frac{n\triangle ABC}{m+n}$

$$= m : n, \text{ d. h.}$$

das $\triangle ABC$ kann nach der oben angegebenen Construktion in zwei Theile getheilt werden, die irgend ein beliebiges Verhältniß zu einander haben können.

Fig. 150.



Auflösung II. Es sey (Fig. 150.) das Dreieck ABC in drei gleiche Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit einer Geraden MN parallel laufen. Zieht man durch die Dreiecksecke C die Gerade CD || MN, und theilt man AB in den Punkten E und F in drei gleiche Theile, so können zwei verschiedene Fälle Statt finden, nämlich:

Erster Fall. Die Theilungspunkte auf AB fallen alle zwischen A und D. Man beschreibe über AD einen Halbkreis,

errichte FJ und EG senkrecht auf AD, ziehe AG, AJ, mache AK $=$ AJ, und AH $=$ AG und ziehe endlich KL || HP || DC, so ist durch diese Parallelen das Dreieck, wie verlangt, getheilt.

Beweis. Es ist $\triangle AHP : \triangle ADC = AH^2 : AD^2$ (§. 104.)
$= AE . AD : AD^2$ (§. 100. Z. 4)
$= AE : AD$

ferner ist $\triangle ADC : \triangle ABC = AD : AB$ (§. 102.)

folglich $\triangle AHP : \triangle ABC = AE : AB$
$= 1 : 3$

daher $\triangle AHP = \frac{1}{3} \triangle ABC$

Weiter ergibt sich

$\triangle AKL : \triangle ADC = AF : AD$
$\triangle ADC : \triangle ABC = AD : AB$

mithin $\triangle AKL : \triangle ABC = AF : AB$
$= 2 : 3$

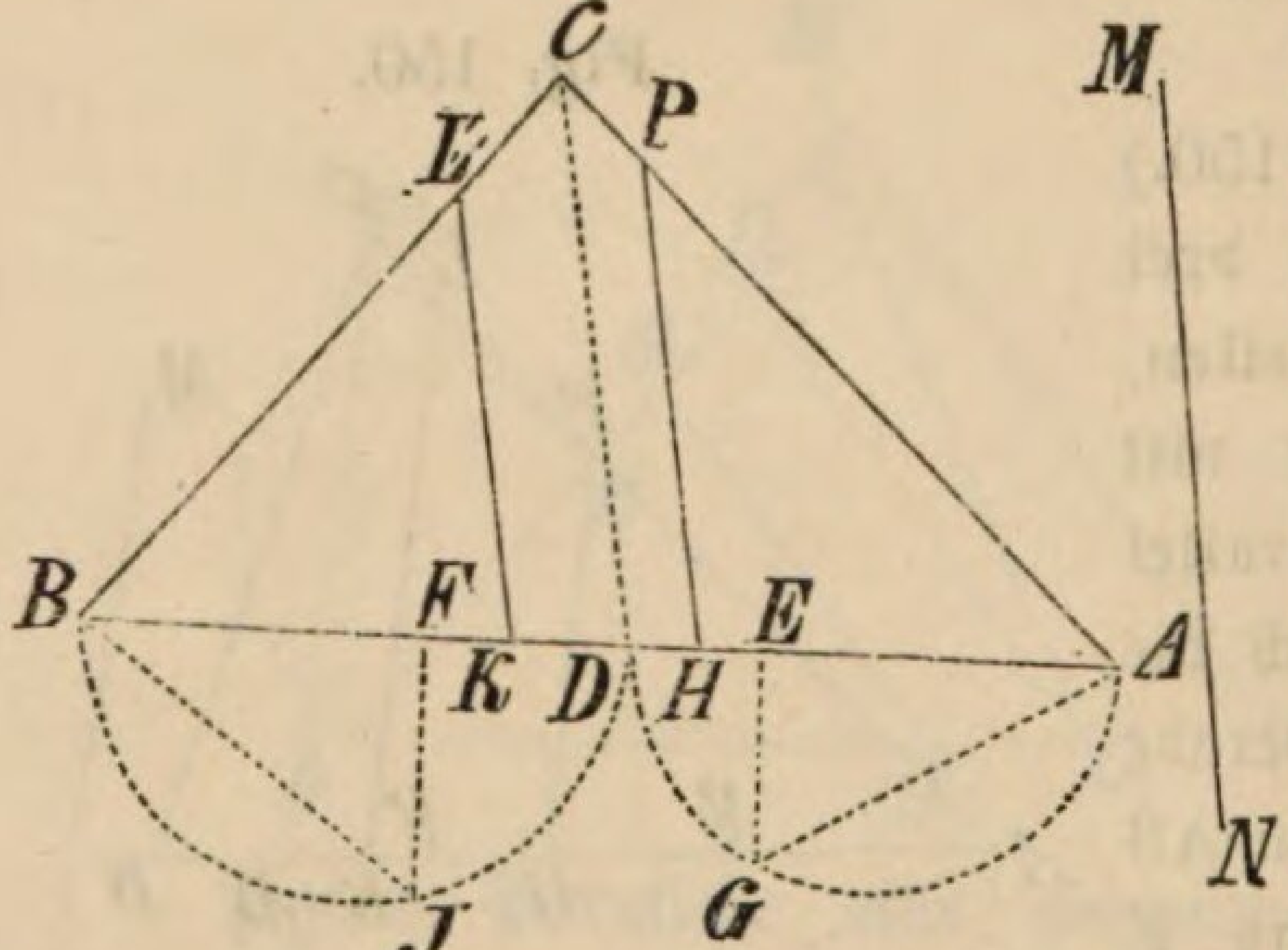
oder $\triangle AKL = \frac{2}{3} \triangle ABC$

Nun ist $PHKL = \triangle AKL - \triangle AHP$
$= \frac{2}{3} \triangle ABC - \frac{1}{3} \triangle ABC$
$= \frac{1}{3} \triangle ABC$

Endlich $LKBC = \triangle ABC - \triangle AKL$
$= \triangle ABC - \frac{2}{3} \triangle ABC$
$= \frac{1}{3} \triangle ABC$

Also $\triangle AHP = PHKL = LKBC = \frac{1}{3} \triangle ABC$

Fig. 151.



Zweiter Fall. Die Theilungspunkte auf AB fallen sowohl zwischen A und D, als auch zwischen D und B. (Fig. 151.)

Die Theilungspunkte, die AB in 3 gleiche Theile theilen, seyen wieder E, F. Man beschreibe über AD und DB Halbkreise, errichte die Senkrechten EG und FJ, ziehe AG und BJ, mache AH $=$ AG und BK $=$ BJ und ziehe HP || KL || CD, so ist die verlangte Theilung vollbracht.

Beweis. $\triangle ADC : \triangle ABC = AD : AB$, daraus

$$\triangle ADC = \frac{AD}{AB} \triangle ABC$$

Sodann ist $\triangle AHP : \triangle ADC = AE : AD$, also

$$\triangle AHP : \frac{AD}{AB} \triangle ABC = AE : AD, \text{ mithin}$$

$$\triangle AHP : \triangle ABC = AE : AB$$
$$= 1 : 3, \text{ daraus}$$
$$\triangle AHP = \tfrac{1}{3} \triangle ABC.$$

Ganz auf ähnliche Weise läßt sich zeigen, daß

$$\triangle BKL : \triangle ABC = BF : AB$$
$$= 1 : 3, \text{ also auch}$$
$$\triangle BKL = \tfrac{1}{3} \triangle ABC.$$

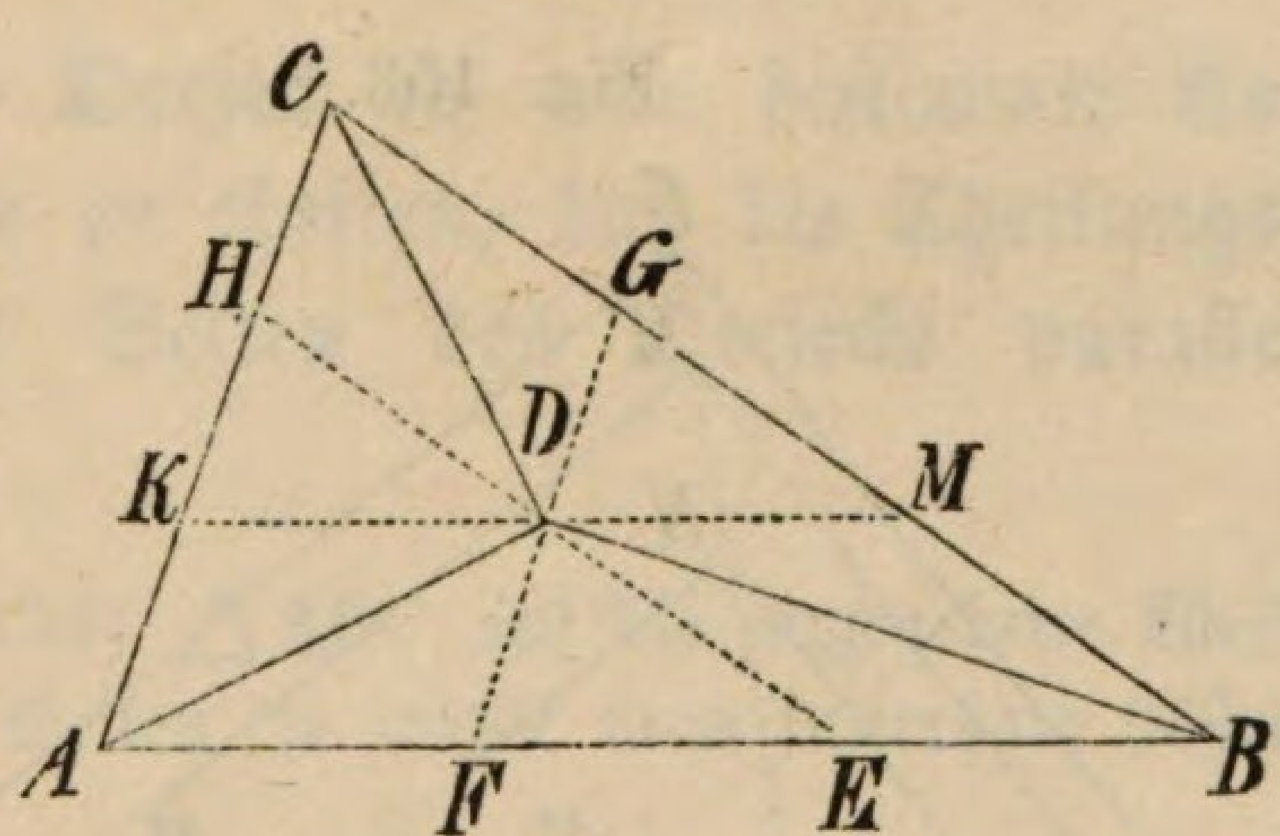
Ist aber $\triangle AHP + \triangle BKL = \tfrac{2}{3} \triangle ABC$, so muß nothwendigerweise auch $KHPCL = \tfrac{1}{3} \triangle ABC$ seyn.

Zusatz 1. Wäre das Dreieck nicht in eine Anzahl gleicher Theile, sondern nach einem bestimmten Verhältniß zu theilen, so ist das Verfahren das nämliche, wie leicht zu zeigen ist.

§. 145.

Aufgabe. Innerhalb eines Dreieckes ABC einen Punkt D von solcher Beschaffenheit zu finden, daß die drei Geraden, welche ihn mit den drei Spitzen des Dreiecks verbinden, dieses in drei gleiche Theile theilen (Fig. 152.)

Fig. 152.



Auflösung I. Eine der drei Seiten des Dreiecks, AB, theile man in den Punkten E und F in drei gleiche Theile, ziehe durch E eine Parallele zu BC und durch F eine Parallele zu AC, so ist der Durchschnittspunkt D der gesuchte.

Beweis. Man ziehe AD, CD, BD, verlängere ED und FD bis die Seiten des Dreiecks in H und G getroffen werden, und lege durch D eine Parallele zu AB, welche AC in K und BC in M schneidet, so ist $CG : CB = AF : AB$ (§. 62. Z. 3.)

$$= 1 : 3 \text{ (V. d. C.), ferner ist}$$

$$HC : AC = EB : AB$$
$$= 1 : 3;$$

dem §. 102. zufolge ist auch

$\triangle HCD : \triangle ACD = HC : AC = 1 : 3$

$\triangle GCD : \triangle BCD = CG : CB = 1 : 3$

Es ist aber $\triangle HCD = \triangle GCD$ (§. 84. Z. 4.)

folglich $\triangle ACD = \triangle BCD$.

Eben so läßt sich erweisen, daß

$\triangle ABD = \triangle BCD$, mithin

$\triangle ACD = \triangle BCD = \triangle ABD$.

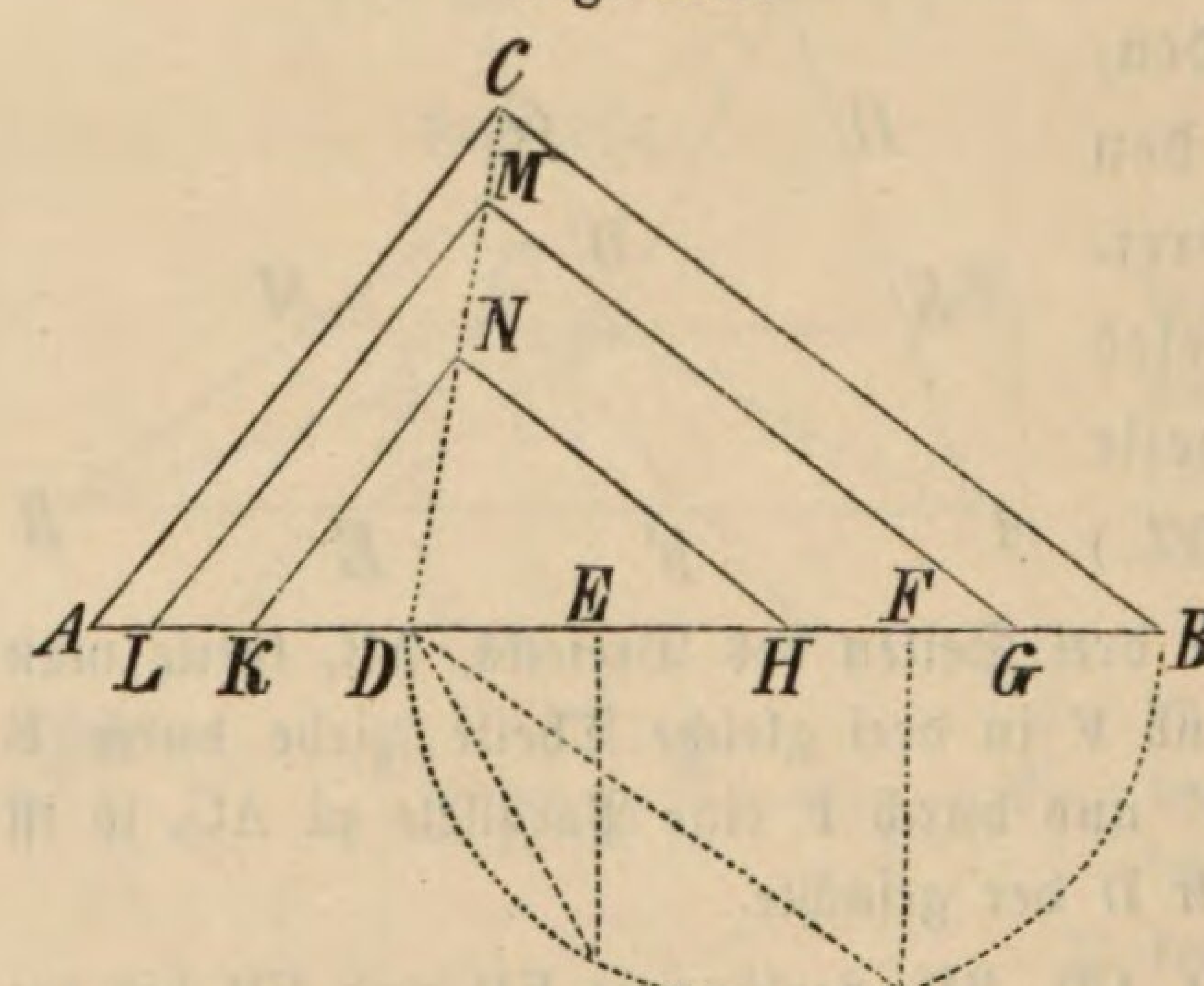
Auflösung II. Man halbire (Fig. 79) jede der drei Seiten des Dreiecks ABC in den Punkten E, F, D, und ziehe BE, FC, DA, so ist (§. 76. XIX.) der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt G der gesuchte Punkt.

Beweis ist nach §. 101 Z. 4 leicht zu führen.

§. 146.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile oder nach einem bestimmten Verhältniß so zu theilen, daß die Theilungslinien mit zweien Seiten des Dreiecks parallel laufen.

Fig. 153.



Auflösung. Es sey (Fig. 153) $\triangle ABC$ in drei Theile so zu theilen, daß diese Theile sich wie m : n : p verhalten, und die Theilungslinien sowohl mit AC als auch mit BC parallel laufen.

Man ziehe CD willkürlich nach AB, jedoch so, daß D zwischen A und B falle, theile DB in den Punkten E, F nach dem verlangten Verhältniß, nämlich daß DE : EF : FB = m : n : p ist, sodann theile $\triangle DBC$ (nach §. 143.) so, daß die Theilungslinien HN und GM mit BC parallel laufen, und daß $\triangle DHN : NHGM : MGBC = DE : EF : FB = m : n : p$ Statt findet.

Zieht man nun KN und LM parallel zu AC, so ist das Dreieck ABC, wie verlangt, getheilt.

Beweis. Weil $\triangle DHN \sim \triangle DBC$, so ist

$$\triangle DHN : \triangle DBC = DN^2 : DC^2 \quad (§.\ 104.)$$

und weil $\triangle DKN \sim \triangle DAC$, so ist

$$\triangle DKN : \triangle DAC = DN^2 : DC^2$$

folglich $\triangle DHN : \triangle DBC = \triangle DKN : \triangle DAC.$

Nun ist aber auch $\triangle DHN : \triangle DBC = DE : DB = m : (m + n + p)$

daher auch $\triangle DKN : \triangle DAC = m : (m + n + p)$ A.)

Ebenso läßt sich zeigen, daß

$\triangle DLM : \triangle DAC = DF : DB = (m + n) : (m + n + p)$ ist (B.)

Aus den Proportionen A und B folgt aber

$\triangle DLM : \triangle DKN = (m + n) : m$, und aus dieser

$\triangle DKN : (\triangle DLM - \triangle DKN) = m : (m + n - m)$ oder

$$\triangle DKN : LKNM = m : n.$$

Und auf dieselbe Weise läßt sich darthun, daß

$$\triangle DKN : ALMC = m : p.$$

Weil nun $\triangle DHN : NHGM : MGBC = m : n : p$, (B. D. C.)

und auch $\triangle DKN : LKNM : ALMC = m : n : p$

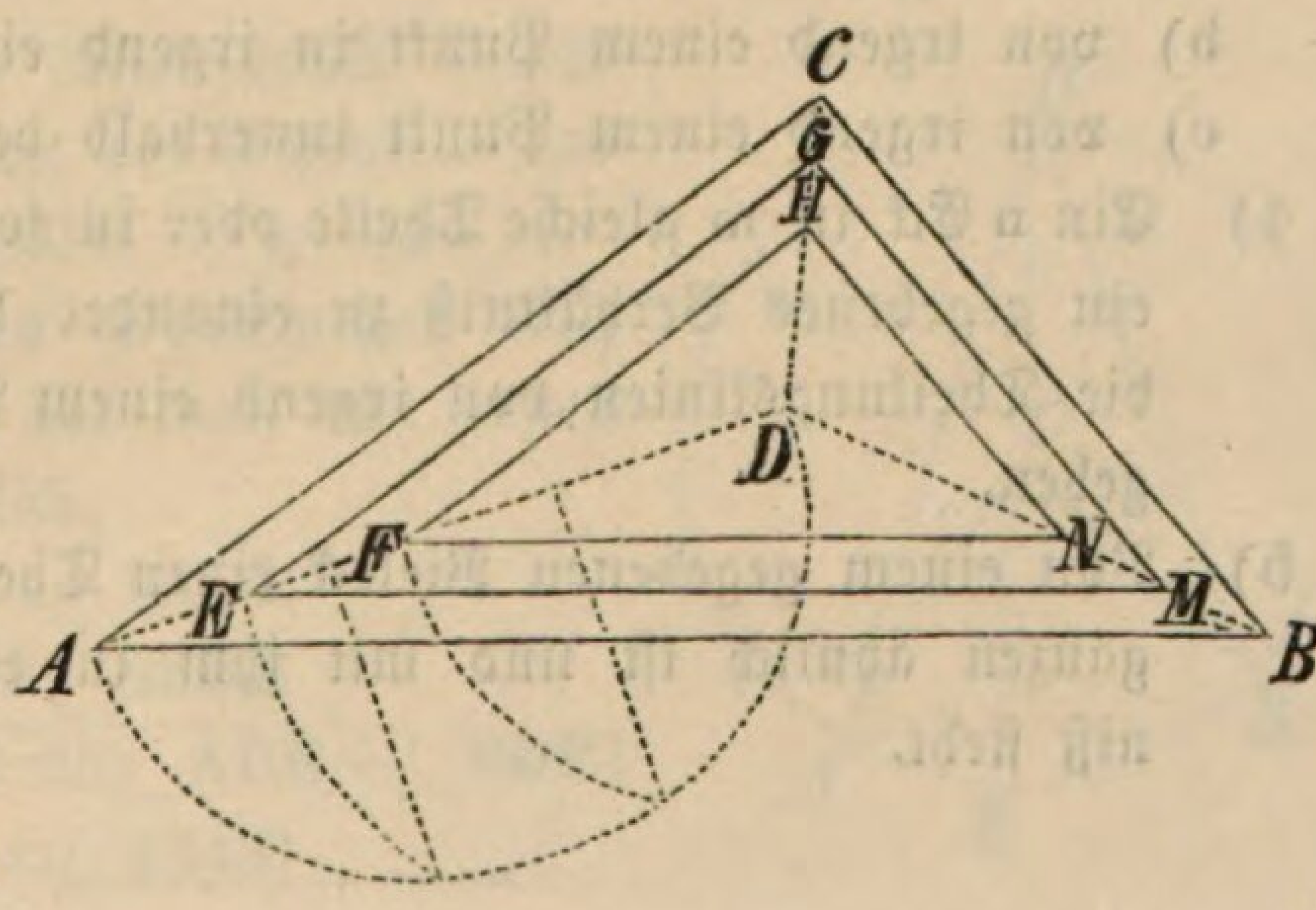
so ist $\triangle KNH : LKNHGM : ALMGBC = m : n : p$. (W. Z. C.)

§. 147.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile so zu theilen, daß die Theilungslinien mit den drei Seiten des Dreiecks parallel laufen.

Auflösung. Es sey (Fig. 154) $\triangle ABC$ auf die angegebene Weise in drei gleiche Theile zu theilen, so wähle man innerhalb desselben einen Punkt D, ziehe AD, DC, DB; theile eines von den erhaltenen drei Dreiecken, etwa $\triangle ADC$, nach §. 143 in drei gleiche Theile, so daß die Theilungslinien EG, FH mit der Seite AC des gegebenen Dreiecks

Fig. 154.



parallel laufen; zieht man nun FN || EM || AB, sodann HN und GM, so ist die Aufgabe gelöst.

Beweis. Dieser ist dem in der vorigen Aufgabe gegebenen, ganz ähnlich. Nur muß hier noch dargethan werden, daß

HN || GM || CB ist.

Dieses geht aber daraus hervor, weil AC : AB = EG : EM, und $\angle$ CAB = $\angle$ GEM ist, also $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ EMG u. s. w.

§. 148.

Aufgaben.

1) Ein gegebenes Parallelogramm in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile oder nach einem bestimmten Verhältniß so zu theilen, daß die Theilungslinien
 a) mit einer Seite, oder
 b) mit einer Diagonale parallel laufen, oder
 c) von einer bestimmten Ecke, oder
 d) von einem Punkt in irgend einer Seite, oder
 e) von irgend einem Punkt innerhalb des Parallelogramms ausgehen.

2) Ein gegebenes Trapez in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile oder nach einem bestimmten Verhältniß so zu theilen, daß die Theilungslinien
 a) mit den parallelen Seiten, oder
 b) mit einer der nicht parallelen Seiten, oder
 c) mit einer Diagonale parallel laufen, oder
 d) von einer bestimmten Ecke, oder
 e) von einem Punkt in irgend einer Seite, oder
 f) von irgend einem Punkt innerhalb des Trapezes ausgehen.

3) Ein Viereck in n Theile zu theilen; diese Theile sollen sich verhalten wie p : q : r .. : z, und die Theilungslinien gehen aus
 a) von irgend einer Ecke,
 b) von irgend einem Punkt in irgend einer Seite,
 c) von irgend einem Punkt innerhalb des Vierecks.

4) Ein n Eck in m gleiche Theile oder in solche Theile zu theilen, die ein gegebenes Verhältniß zu einander haben und zwar so, daß die Theilungslinien von irgend einem Punkt des Umfanges ausgehen.

5) Von einem gegebenen Vieleck einen Theil abzuschneiden, der dem ganzen ähnlich ist und mit ihm in einem gegebenen Verhältniß steht.

Fünfter Abschnitt.

Der Kreis.

---

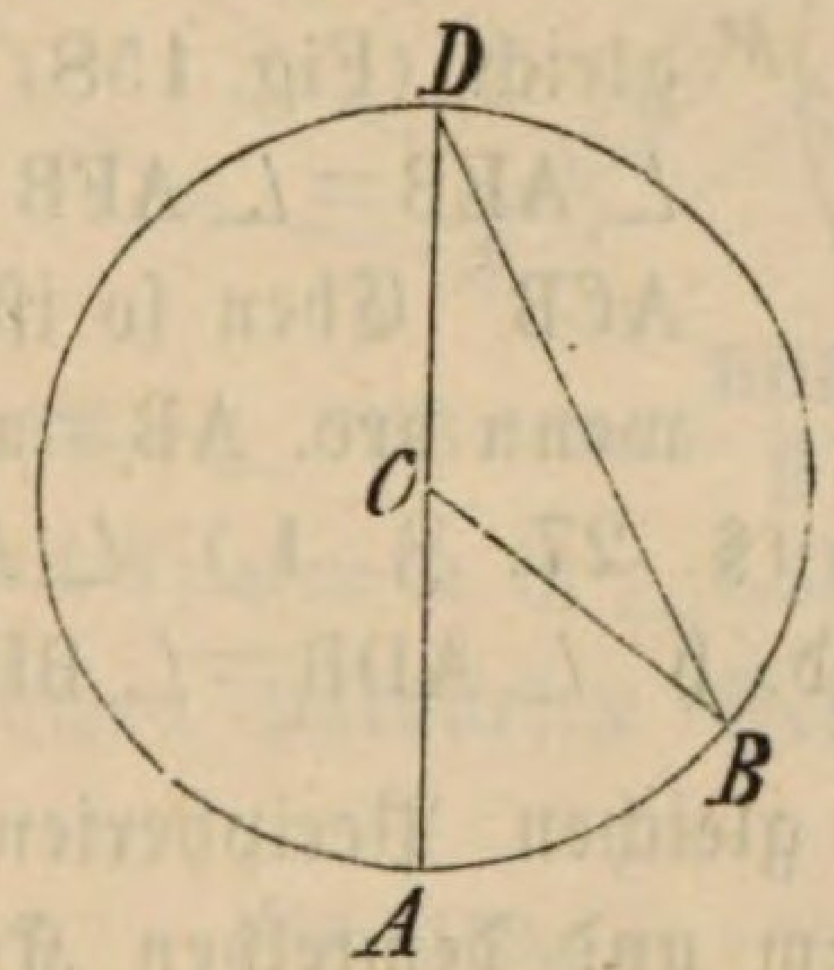
§. 149.

Lehrsatz. Der Centriwinkel ist noch einmal so groß als der Peripheriewinkel, der mit ihm auf einerlei Bogen steht.

Beweis. Es können hier drei verschiedene Fälle Statt finden:

Erster Fall. Der Mittelpunkt C des Kreises liegt in einem Schenkel des Peripheriewinkels ADB. (Fig. 155.)

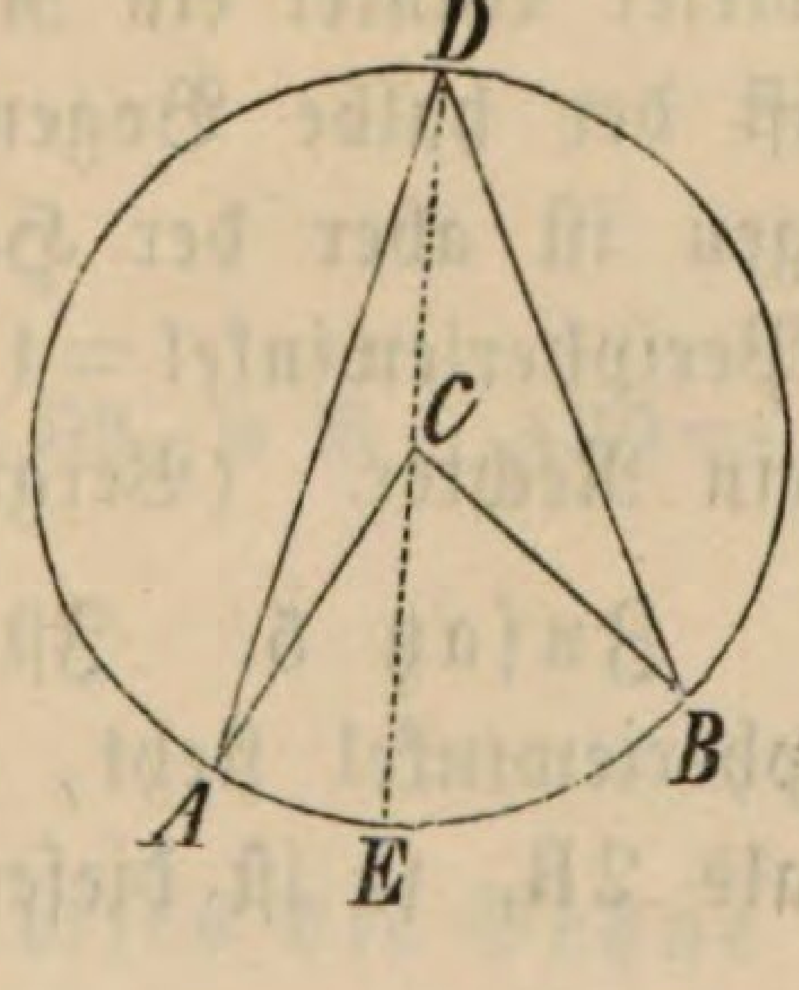
Fig. 155.



Man ziehe CB, so ist nach (§. 35.)

$$\angle ACB = \angle CDB + \angle CBD$$
$$= \angle 2ADB \text{ (§. 44. Z. 3.)}$$

Fig. 156.

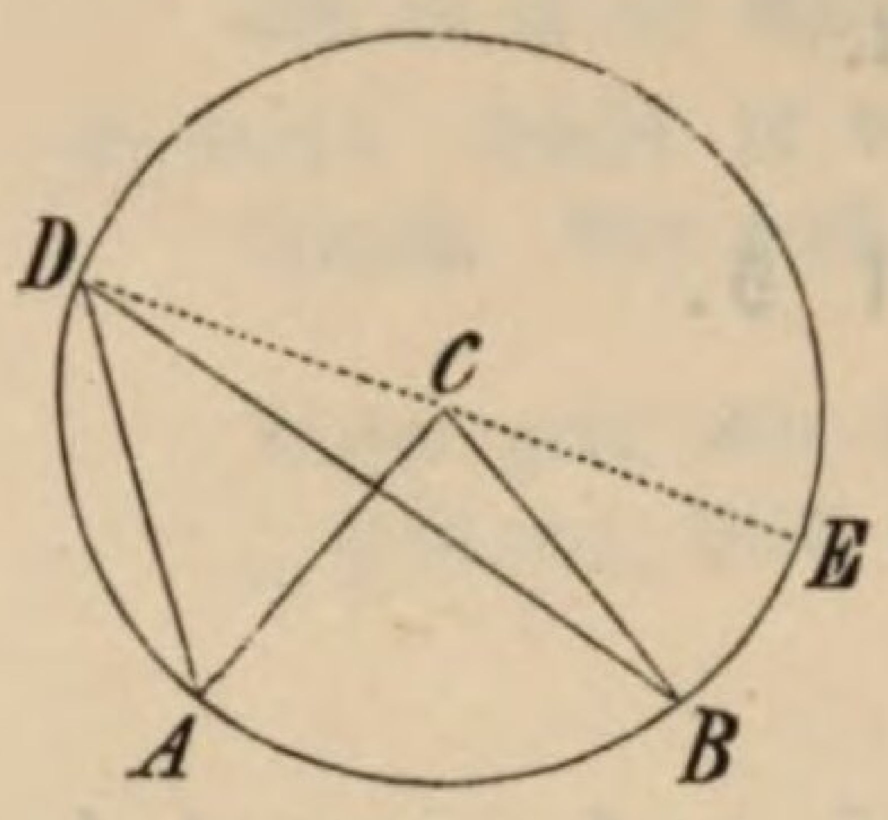


Zweiter Fall. Der Mittelpunkt C des Kreises liegt zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels ADB. (Fig. 156.)

Man ziehe den Durchmesser DE, ferner AC, BC, so hat man den ersten Fall doppelt, nämlich:

$$\angle ACE = \angle 2ADE$$
$$\angle BCE = \angle 2BDE$$
$$\overline{\angle ACE + \angle BCE = 2(\angle ADE + \angle BDE)}$$
$$\angle ACB = \angle 2ADB$$

Fig. 157.



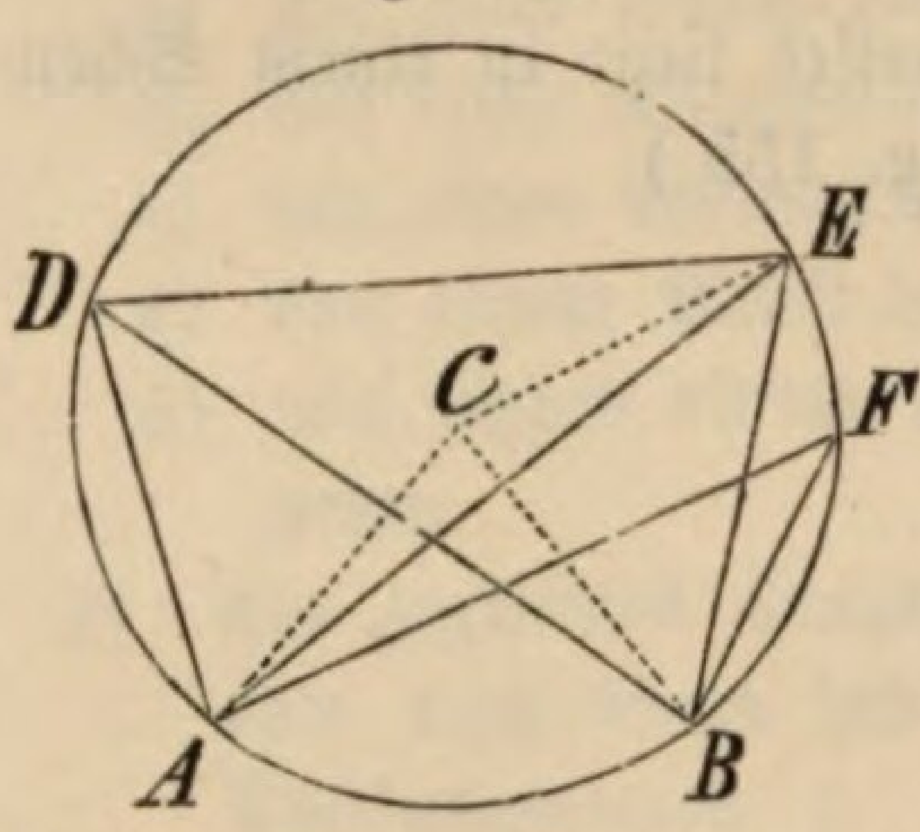
Dritter Fall. Der Mittelpunkt C des Kreises liegt außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels ADB. (Fig. 157.)

Man ziehe den Durchmesser DE, ferner AC, BC, so ist nach dem ersten Fall:

$$\angle ACE = \angle 2ADE$$
$$\angle BCE = \angle 2BDE$$
$$\overline{\angle ACE - \angle BCE = 2(\angle ADE - \angle BDE)}$$
$$\angle ACB = \angle 2ADB.$$

Zusatz 1. Der Peripheriewinkel hat also den halben Bogen zum Maß, auf welchem er steht.

Fig. 158.



Zusatz 2. Peripheriewinkel, welche auf einerlei Bogen oder auf gleichen Bogen stehen, sind einander gleich, (Fig. 158) nämlich: $\angle ADB = \angle AEB = \angle AFB$; denn jeder $= \frac{1}{2} \angle ACB$. Eben so ist $\angle ADB = \angle BDE$, wenn arc. AB = arc. BE ist; denn in diesem Fall ist auch (§. 27. Z. 1.) $\angle ACB = \angle BCE$, also $\angle \frac{1}{2} ACB = \frac{1}{2} \angle BCE$, d. h $\angle ADB = \angle BDE$.

Zusatz 3. Zu gleichen Peripheriewinkeln in gleichen Kreisen oder in einem und demselben Kreis gehören gleiche Bogen.

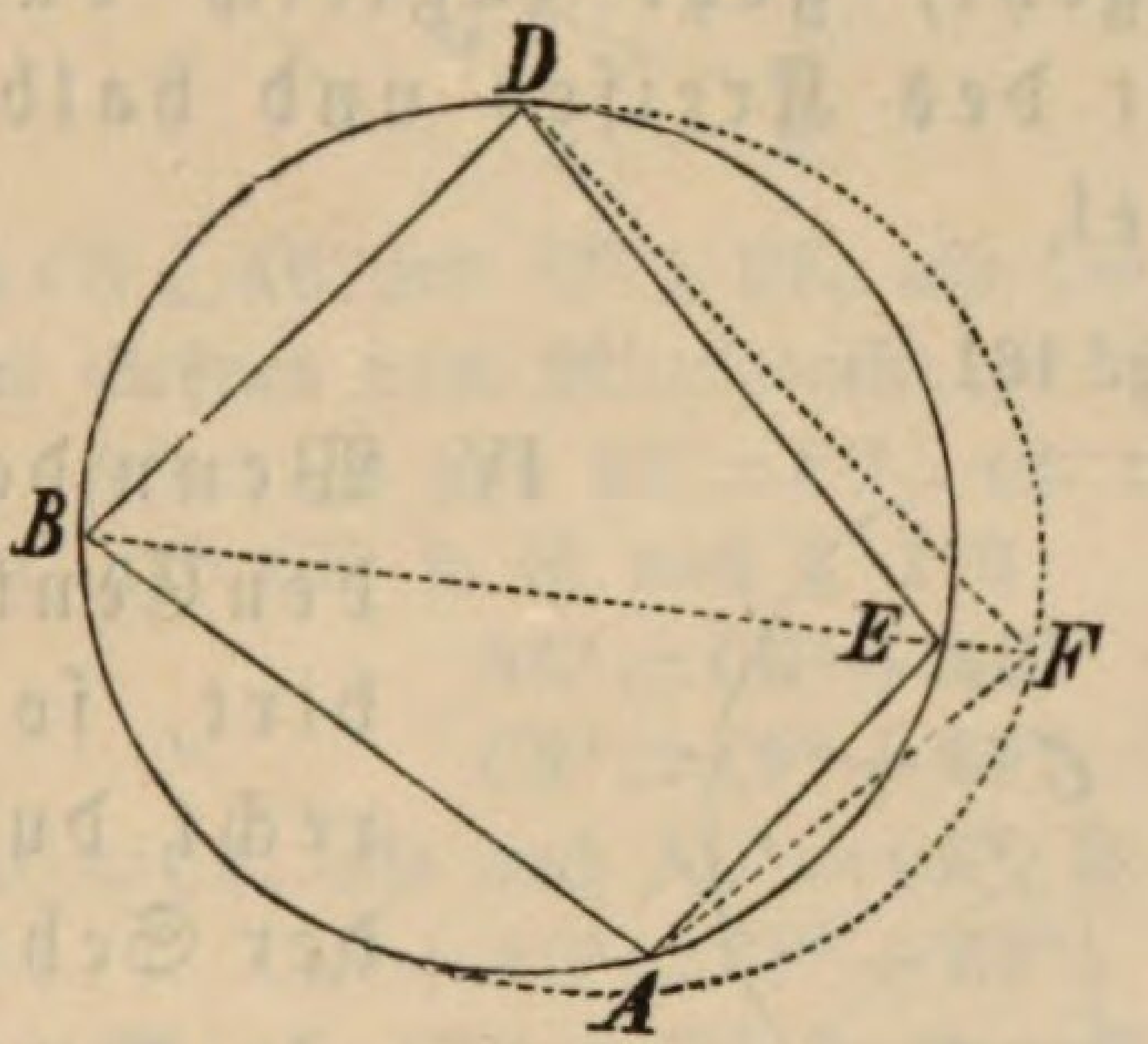
Zusatz 4. Stehen die Schenkel eines Peripheriewinkels auf den Endpunkten eines Durchmessers auf, so ist dieser Winkel ein Rechter; denn das Maß dieses Winkels ist der halbe Bogen auf dem er steht (Z. 1.), dieser Bogen ist aber der Halbkreis und = 2R, mithin jeder dieser Peripheriewinkel = 1 R, oder der Winkel im Halbkreis ist ein Rechter. (Vergl. §. 60.)

Zusatz 5. Ist der Bogen, auf welchem der Peripheriewinkel steht, größer als der Halbkreis, also größer als 2R, so ist dieser Winkel größer als R, d. h. stumpf,

und ist der Bogen, auf welchem der Peripheriewinkel steht, kleiner als der Halbkreis, so ist dieser Winkel kleiner als R, d. h. spitz. Nämlich der Winkel im kleineren Kreisabschnitt (§. 26.) ist stumpf, im größeren spitz.

Zusatz 6. In jedem Viereck, dessen vier Winkelspitzen in der Peripherie eines Kreises liegen, ist allemal die Summe je zweier gegenüberliegenden Winkel = 2R.

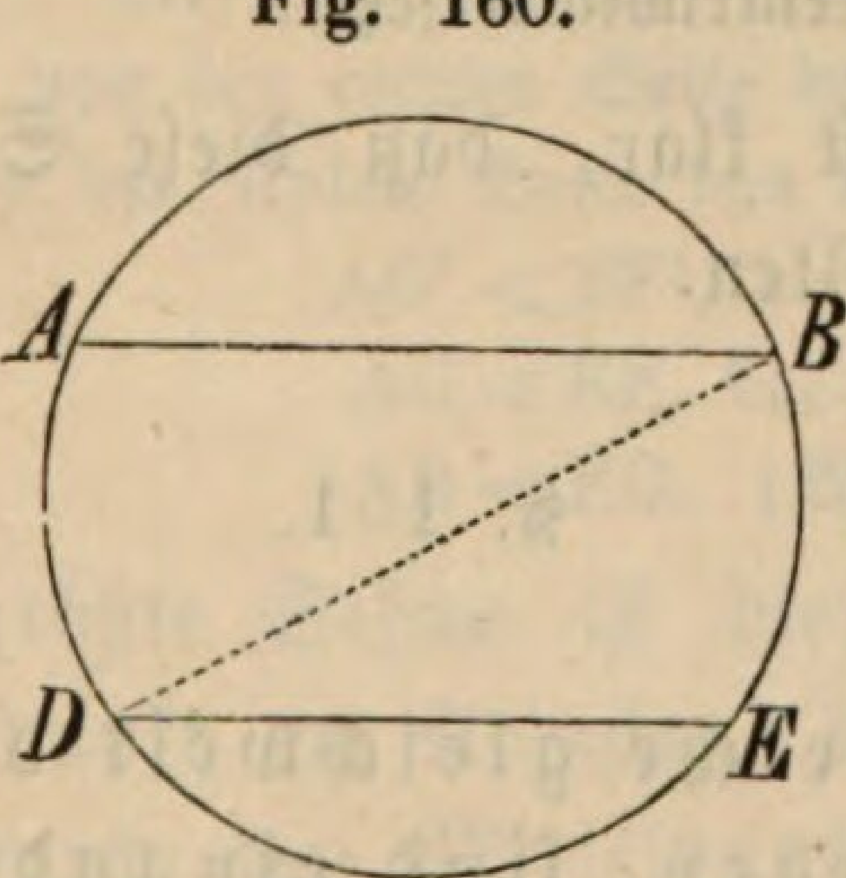
Fig. 159.



Denn (Fig. 159) $\angle$ BAE + $\angle$ BDE = arc. $\frac{BDE}{2}$ + arc. $\frac{BAE}{2}$ = der halben Peripherie = 2R; eben so ist $\angle$ AED + $\angle$ ABD = 2R.

Zusatz 7. Zwischen parallelen Sehnen liegen gleiche Bogen.

Fig. 160.



Denn (Fig. 160) ist AB || DE und man zieht DB, so ist $\angle$ ABD = $\angle$ BDE (§. 16) also arc. AD = arc BE.

§. 150.

Lehrsatz.

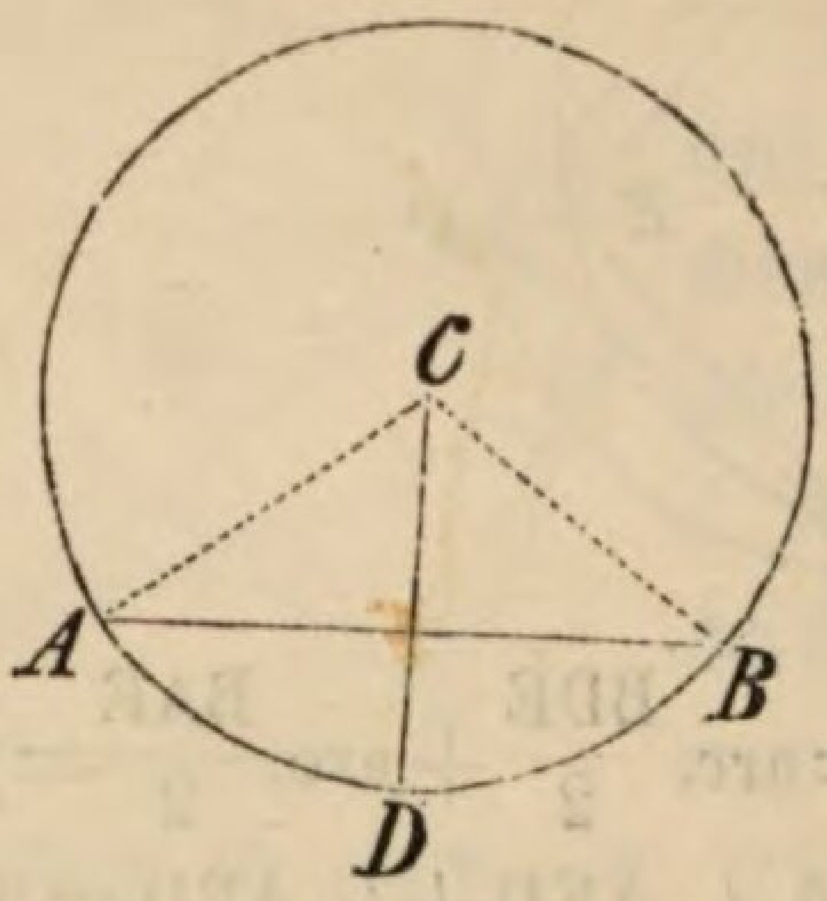
I. Wenn der Halbmesser des Kreises die Sehne

senkrecht durchschneidet, so durchschneidet er sie in der Mitte und halbirt den dazu gehörigen Centriwinkel.

II. Wenn der Halbmesser des Kreises durch die Mitte der Sehne geht, so durchschneidet er sie senkrecht und halbirt den Centriwinkel.

III. Die Senkrechte, die durch die Mitte der Sehne geht, geht zugleich durch den Mittelpunkt des Kreises und halbirt den Centriwinkel.

Fig. 161.



IV. Wenn der Halbmesser den Centriwinkel halbirt, so geht er senkrecht durch die Mitte der Sehne. (Fig. 161.)

Beweis. Weil AC=BC (als Halbmesser), so gelten im gleichschenkeligen Dreieck ABC alle die in §. 57 aufgestellten Sätze, welche eigentlich keine andern, als die in diesem Lehrsatz ausgesprochenen sind, wenn man nur für Senkrechte Halbmesser, für Grundlinie Sehne und für Winkel an der Spitze Centriwinkel setzt.

Zusatz. Es ist klar, daß diese Sätze ebensowohl für den Durchmesser gelten.

§. 151.

Lehrsatz.

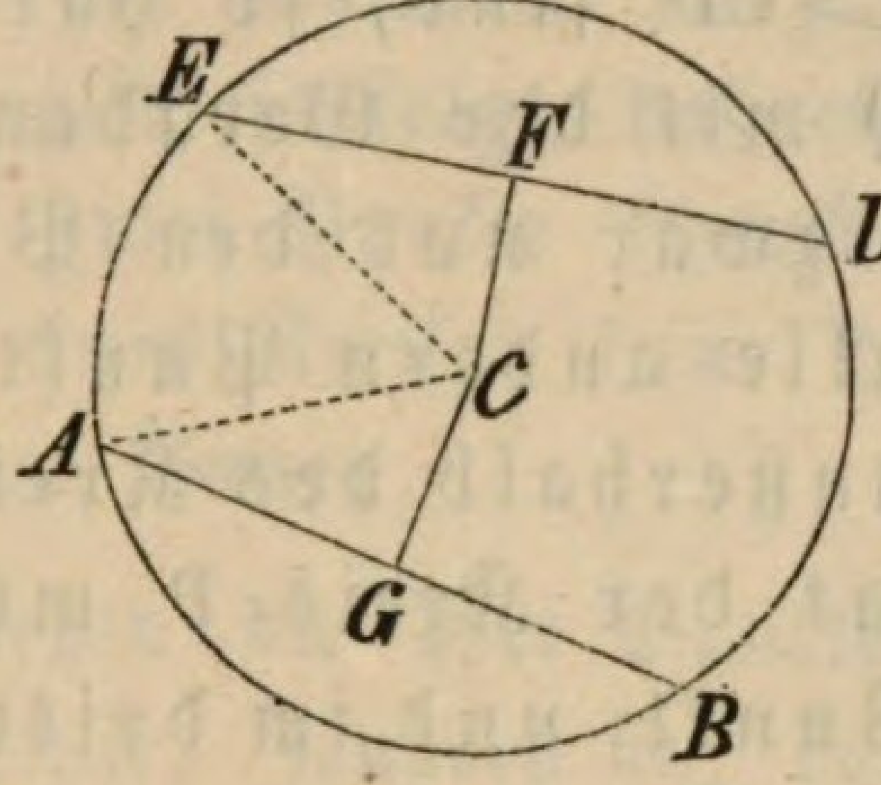
I. Sehnen, welche gleichweit vom Mittelpunkt entfernt liegen, sind einander gleich.

II. Sehnen, die einander gleich sind, sind in gleicher Entfernung vom Mittelpunkt.

III. Sind die Entfernungen vom Mittelpunkt ungleich, so sind auch die Sehnen ungleich

und zwar ist die entferntere die kleinere, die nähere die größere Sehne. (Fig. 162.)

Fig. 162.



Beweis. Es sey $CG \perp AB$ und $CF \perp DE$, also CG und CF die Entfernungen der Sehnen vom Mittelpunkt (§. 55).

$$AG = GB \text{ und } EF = FD. \quad (\S. 150.)$$

I. Man ziehe AC und CE, so ist nach §. 110.

$$AC^2 = CG^2 + AG^2$$
$$CE^2 = CF^2 + EF^2$$

Weil aber $AC = CE$, also auch $AC^2 = CE^2$, so ist

$$CG^2 + AG^2 = CF^2 + EF^2.$$

Ist nun $CG = CF$, also $CG^2 = CF^2$, so ist auch $AG^2 = EF^2$ oder $AG = EF$ und $2AG = 2EF$ oder $AB = ED$ (W. Z. E.).

II. Ist $AB = ED$, also auch $AG = EF$ und $AG^2 = EF^2$, so folgt aus

$$CG^2 + AG^2 = CF^2 + EE^2$$

daß $CG^2 = CF^2$ oder $CG = CF$. (W. Z. E.)

III. Ist $CG > CF$, also auch $CG^2 > CF^2$, so folgt aus

$$CG^2 + AG^2 = CF^2 + EE^2$$

daß, wenn man von der rechten Seite der Gleichung das größere CG^2 und von der linken Seite das kleinere CF^2 subtrahirt,

$$AG^2 < EF^2, \text{ oder}$$
$$AG < EF, \text{ daher}$$
$$AB < ED. \text{ (W. Z. E.)}$$

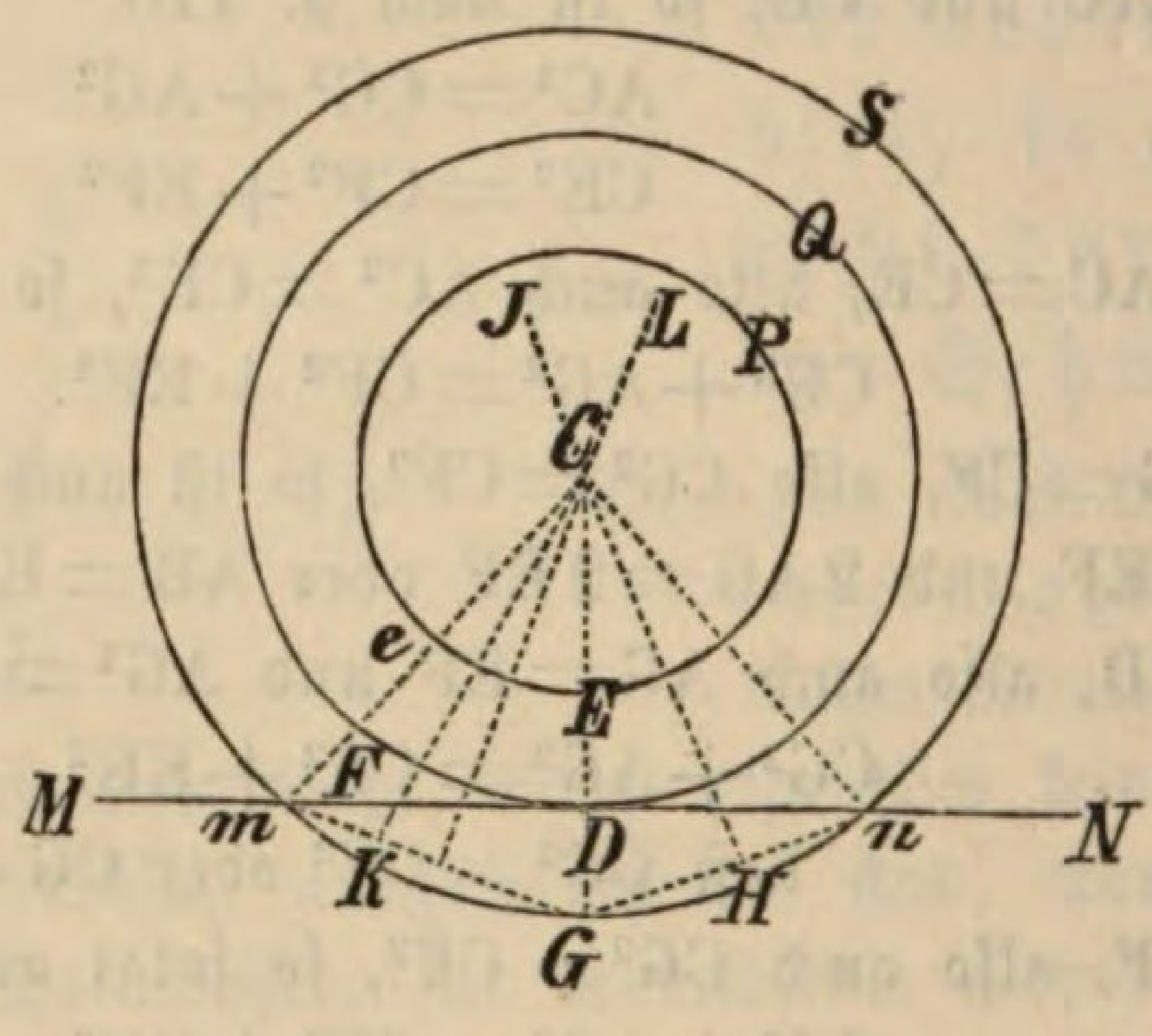
Zusatz. Die größte Sehne ist diejenige, deren Entfernung vom Mittelpunkt am kleinsten, d. h. Null ist, mithin diejenige, die durch den Mittelpunkt selbst geht, also ein Durchmesser ist.

§. 152.

Lehrsatz. Wenn man von einem Punkt C (Fig. 163) auf eine Gerade MN eine Senkrechte CD fällt

und sodann um C drei Kreise P, Q, S beschreibt, deren Halbmesser 1) gleich CD, 2) kleiner als CD, nämlich CE<CD und 3) größer als CD nämlich CG>CD sind, so hat im ersten Fall der Kreis Q mit der Geraden MN nur einen Punkt und zwar nur den Punkt D gemeinschaftlich, alle andern Punkte der Geraden MN liegen außerhalb des Kreises Q; im zweiten Fall hat der Kreis P mit der Geraden MN keinen Punkt; und im dritten Fall hat der Kreis S mit der Geraden MN zwei Punkte gemeinschaftlich.

Fig. 163.



Beweis des ersten Falles. D ist offenbar ein Punkt in der Geraden MN und in der Peripherie des Kreises Q zugleich; jeder andere Punkt auf MN, etwa F liegt außerhalb des Kreises, denn zieht man CF, so ist CF > CD. (§. 46. Z. 1.)

Beweis des zweiten Falles. Da CE = Ce < CD; so liegt jeder Punkt der Peripherie des Kreises P näher dem Mittelpunkt C, als der nächste Punkt (§. 54. I.) D der Geraden MN.

Beweis des dritten Falles. Weil CG < CD, so muß es rechts und links von CD zwei gleichschenklige Dreiecke CmD und CnD geben, in welchen Cm = Cn = CG sind, folglich schneidet der Kreis unter dieser Voraussetzung die Gerade MN in zwei Punkte.

Zusatz 1. Außer den zwei Punkten m, n kann der Kreis S mit der Geraden MN keinen Punkt weiter gemein-

schaftlich haben; denn wäre F auch noch ein Punkt in der Peripherie und in der Geraden zugleich, so müßte CF=CG, also CF=Cm seyn, welches gegen §. 54. II. Da dieses von jedem Punkt der Geraden MN, mit Ausnahme der zwei Punkte m, n gilt, so folgt, daß ein Kreis eine gerade Linie höchstens in zwei Punkte schneiden kann, oder daß in der Peripherie eines Kreises keine drei Punkte in einer geraden Linie liegen können.

Zusatz 2. Liegen die drei Punkte m, n und G nicht in einer geraden Linie, sondern so, daß sie gleichweit von einem gemeinschaftlichen Punkt C entfernt liegen, also Cm=Cn=CG ist, so geht durch diese drei Punkte die Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser Cm=Cn=CG ist.

Durch diese drei Punkte m, n, G aber, die nicht in gerader Linie liegen, läßt sich nur ein Kreis beschreiben.

Denn zieht man mG und nG, errichtet in der Mitte dieser Linien die Senkrechten KL und HI, so durchschneiden sich diese in dem Punkte C (§. 16. Z. 6); zieht man nun die Geraden Cm, Cn, CG so sind diese einander gleich (§. 150 III), und mithin geht der aus C mit dem Halbmesser Cm=Cn=CG beschriebene Kreis durch m, n, G. Wäre es möglich, daß durch diese drei Punkte noch ein anderer Kreis gelegt werden könnte, so müßte der Mittelpunkt dieses Kreises ebenfalls in den Senkrechten KL, HI liegen, welche in der Mitte der Sehnen mG und nG errichtet sind, diese Senkrechten haben aber nur einen einzigen Durchschnittspunkt C, daher kann auch nur ein Kreis durch die drei Punkte m, n, G beschrieben werden.

Zusatz 3. Ein Kreis ist daher hinsichtlich seiner Größe (weil der Halbmesser) und Lage nach (weil der Mittelpunkt gefunden werden kann) völlig bestimmt, wenn man drei Punkte seiner Peripherie kennt.

Zusatz 4 Zwei Kreise können höchstens zwei Punkte gemeinschaftlich haben, denn hätten sie 3 Punkte gemeinschaftlich, so fielen sie zu einem einzigen Kreis zusammen.

Zusatz 5. Die drei Eckpunkte eines Dreiecks liegen daher immer in der Peripherie eines Kreises.

Zusatz 6. Wenn je zwei gegenüberliegende Winkel eines Vierecks gleich 2R sind, so liegen die vier Endpunkte immer in der Peripherie eines Kreises.

Denn (Fig. 159) durch die drei Punkte A, B, D geht ein Kreis; würde er nun nicht auch zu gleicher Zeit durch den vierten Punkt E gehen, so müßte er die Diagonale BE zwischen B und E oder deren Verlängerung schneiden. Angenommen die Peripherie des Kreises ginge durch die Verlängerung von BE, etwa durch F, so ziehe man AF und FD, alsdann wäre (nach §. 149 Z. 6.) $\angle ABD + \angle AFD = 2R$; es ist aber $\angle ABD + \angle AED = 2R$ (V. D. V.); daraus würde folgen, daß $\angle AFD = \angle AED$, welches gegen §. 46. Z. 6. Auf dieselbe Weise läßt sich beweisen, daß der Kreis auch nicht die Diagonale selbst schneiden kann, folglich muß er durch E gehen.

Zusatz 7. Durch die vier Eckpunkte eines jeden Rechtecks oder eines jeden Quadrats geht die Peripherie eines Kreises; nie aber durch die eines schiefwinkeligen Parallelogramms.

§. 153.

Erklärung. Eine Gerade, welche mit dem Kreis zwei Punkte gemeinschaftlich hat, also denselben in zwei Punkte schneidet, heißt dessen Secante und eine Gerade, welche mit dem Kreis nur einen Punkt gemeinschaftlich hat, oder denselben in einem Punkt berührt, heißt dessen Tangente; der gemeinschaftliche Punkt heißt Berührungspunkt.

Die Krümmung der Kreislinie von innen nach außen angesehen, heißt concav, von außen nach innen aber convex.

Zusatz. Also ist der Theil der Secante, der innerhalb des Kreises liegt, die Sehne des Kreises.

§. 154.

Lehrsatz.

I. Der Halbmesser oder Durchmesser des Krei-

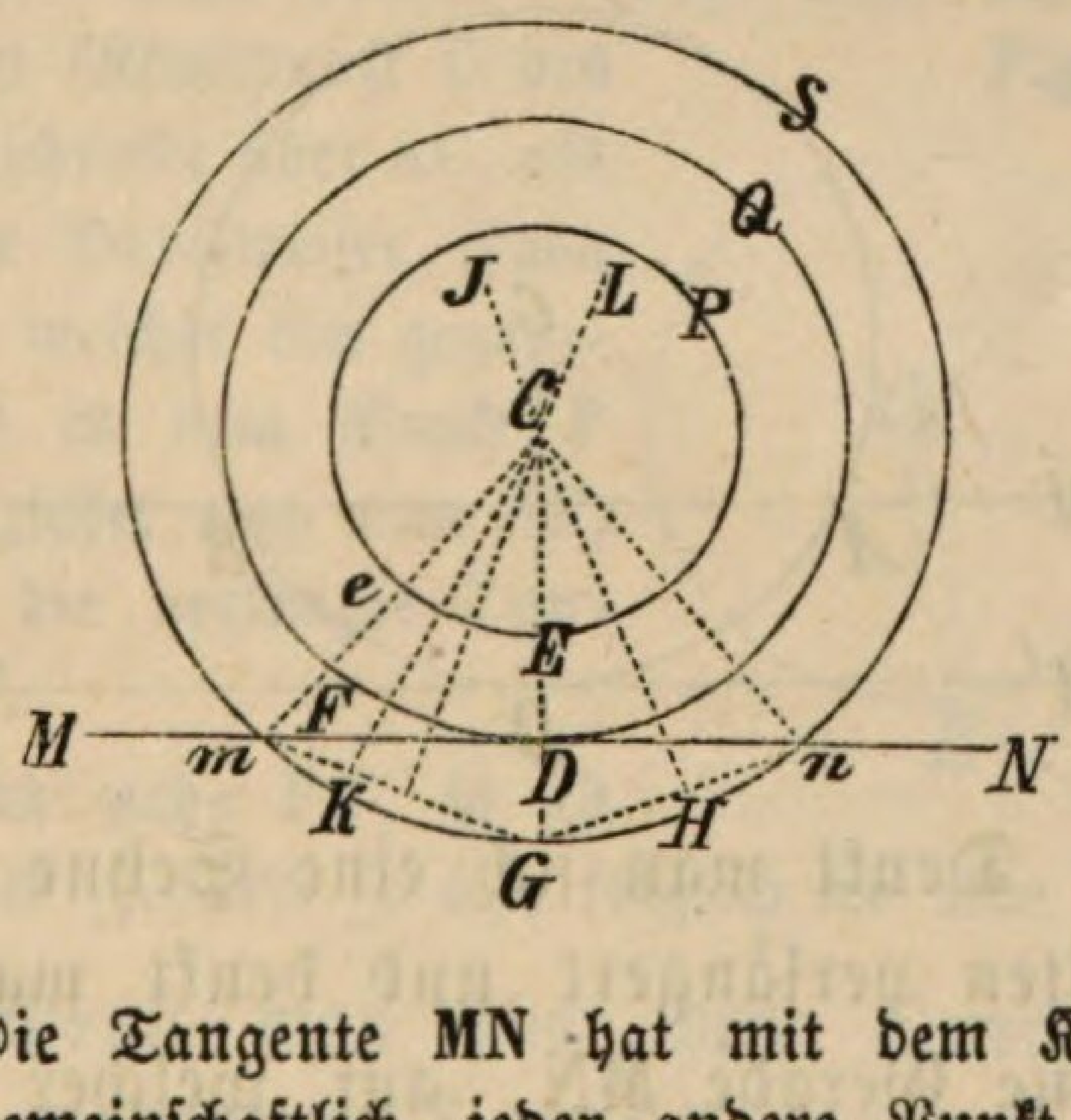
ses steht im Berührungspunkt senkrecht auf der Tangente.

II. Die Senkrechte durch den Endpunkt D des Halbmessers oder Durchmessers gelegt ist die Tangente dieses Kreises für diesen Berührungspunkt D.

III. Durch einen Punkt D der Peripherie eines Kreises ist an diesen nur eine einzige Tangente zu ziehen möglich.

IV. Jede Gerade, durch einen Punkt D der Peripherie, welche nicht zugleich in diesem Punkt senkrecht auf dem Halbmesser steht, schneidet die Peripherie in zwei Punkten und ist folglich eine Secante. (Fig. 163.)

Fig. 163.

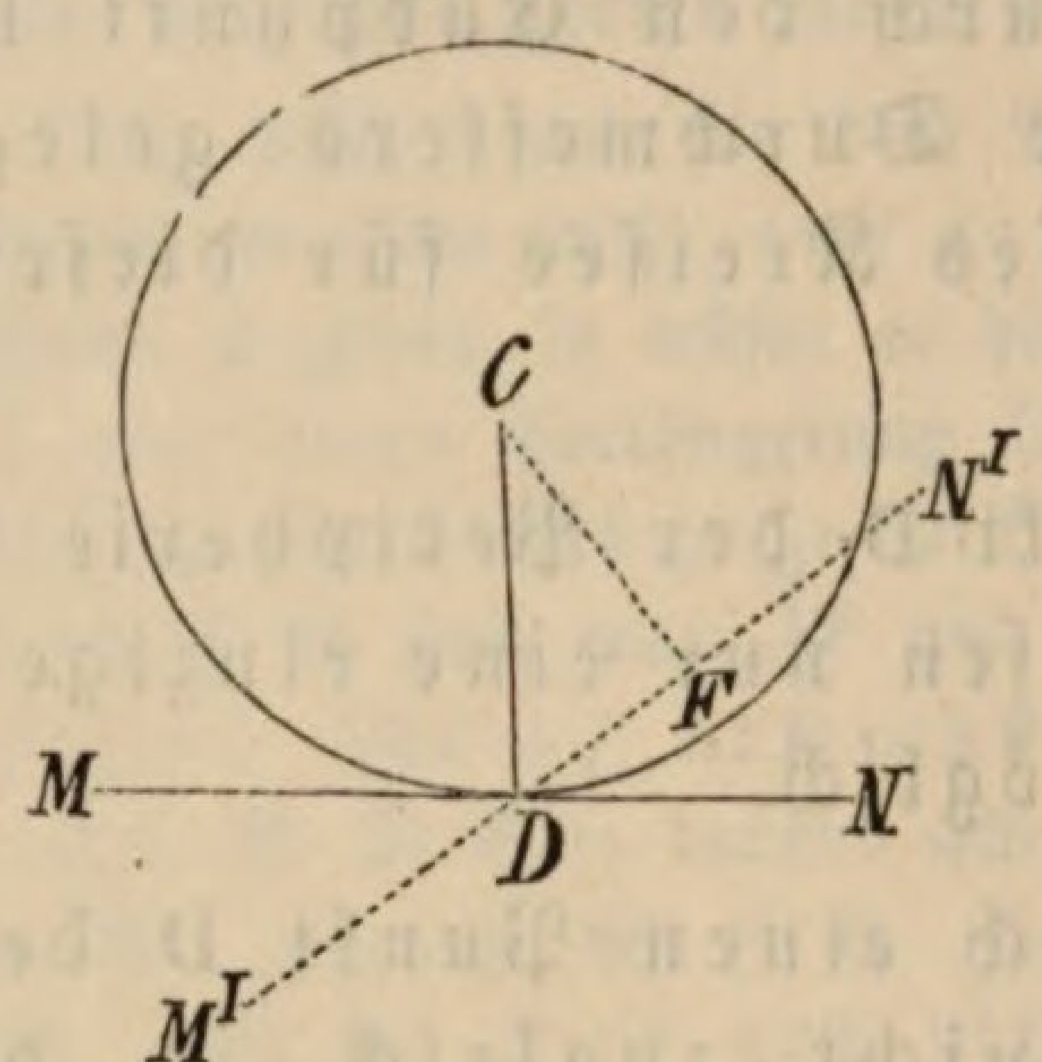


Beweis I. Die Tangente MN hat mit dem Kreis Q nur den Punkt D gemeinschaftlich, jeder andere Punkt F liegt außerhalb des Kreises (§. 152), also jeder dieser Punkte weiter vom Mittelpunkt C entfernt, als der Berührungspunkt D; deshalb ist CD die kürzeste Linie, die vom Mittelpunkt C auf MN gezogen werden kann, deshalb CD senkrecht auf MN (§. 54. I) im Punkte D.

Beweis II. Ist MN ⊥ CD, so ist der Punkt D der Geraden MN der nächste am Mittelpunkt C, also jeder andere Punkt in MN weiter von C entfernt als um den Halbmesser CD, daher jeder dieser Punkte außerhalb des Kreises; daher haben MN und der Kreis Q

nur den Punkt D gemeinschaftlich, folglich MN die Tangente für den Berührungspunkt D.

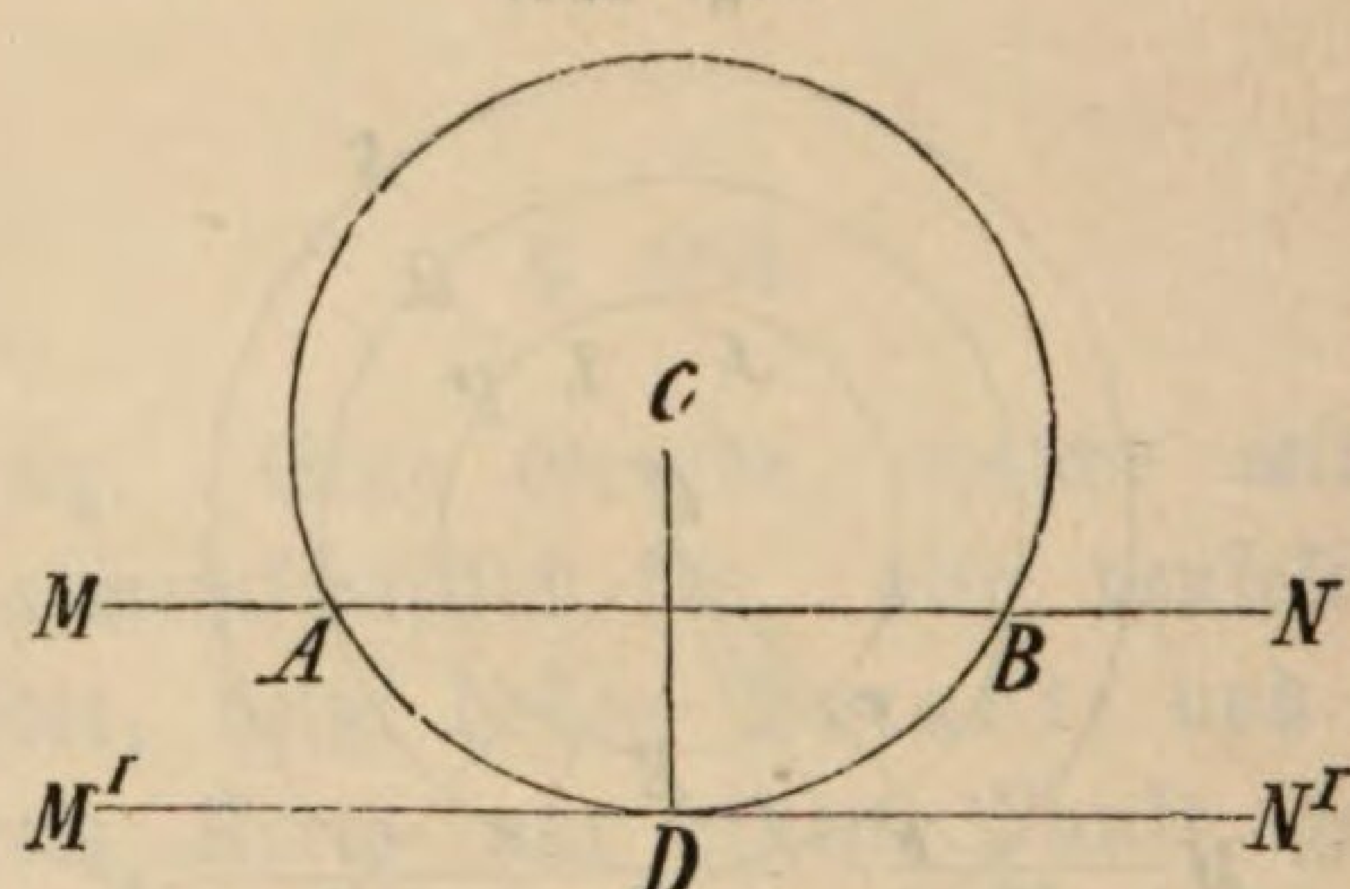
Fig. 164.



Beweis III und IV. Im Punkt D ist auf CD nur eine Senkrechte möglich (§. 53. I); jede andere Gerade durch D, die nicht senkrecht auf CD, etwa wie M′ N′ (Fig. 164.) ist eine Secante; denn ist CF senkrecht auf M′ N′, so ist CD>CF, daher M′ N′ eine Secante. (§. 152.)

Zusatz 1. Es ist daher unmöglich eine gerade Linie durch den Berührungspunkt zwischen der Peripherie des Kreises und der Tangente zu legen.

Fig. 165.



Zusatz 2. Denkt man sich eine Sehne AB (Fig. 165) auf beiden Seiten verlängert und denkt man sich die dadurch entstandene Gerade MN, auf welcher die Sehne AB liegt, sich parallel bewegend immer mehr vom Mittelpunkt C entfernen, so rücken die Punkte A, B immer näher zusammen und fallen endlich im Punkte D auf einander. Die Gerade M′ N′ hat in diesem Falle mit dem Kreis nur den Punkt D gemeinschaftlich; in welchem Punkt D aber der Halbmesser senkrecht auf ihr steht, oder M′ N′ berührt den Kreis in dem Punkt D und ist eine Tangente.

Die Tangente ist daher nichts anderes, als die ver-

längerte letzte Sehne des Kreises, die mit diesem nur noch einen Punkt gemeinschaftlich hat.

§. 155.

Aufgabe.

I. Durch einen gegebenen Punkt D in der Peripherie eines Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.

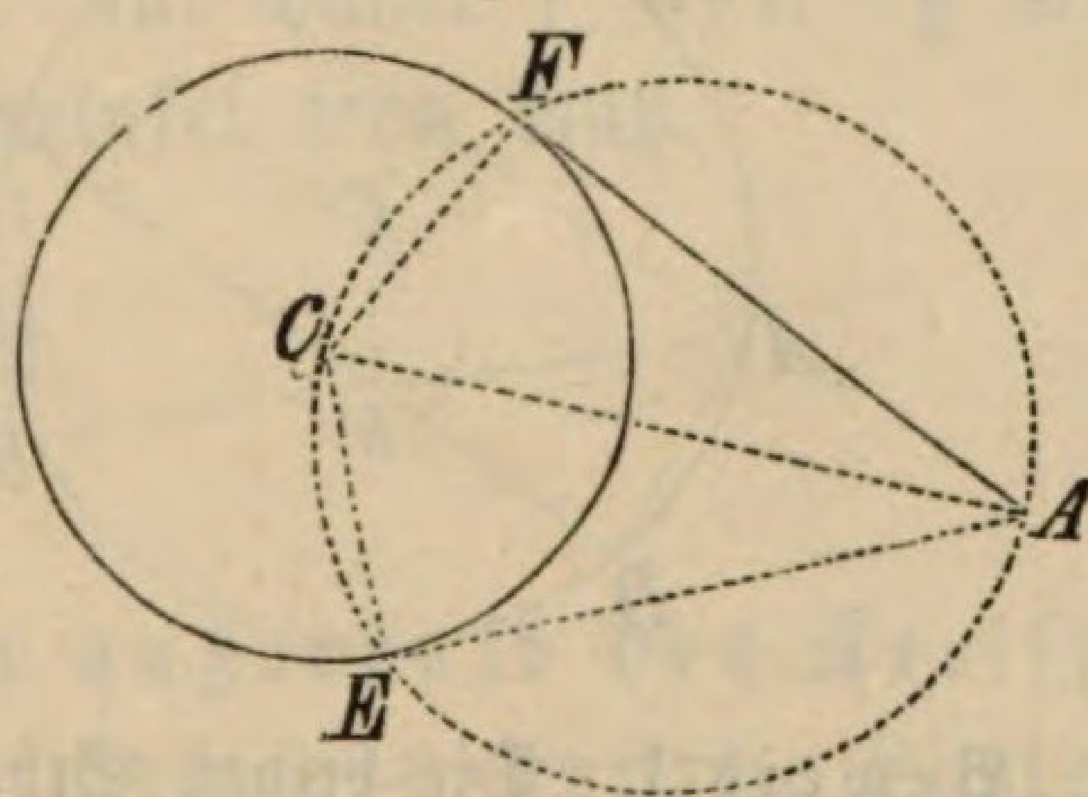
II. Von einem gegebenen Punkt A außerhalb des Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.

Auflösung I. Man ziehe den Halbmesser CD (Fig. 165) und errichte DM' senkrecht auf CD, so ist DM' die verlangte Tangente.

Beweis. (§. 154.)

Auflösung II. Man verbinde (Fig. 166) den gegebenen Punkt A mit dem Mittelpunkt C des Kreises, beschreibe über AC, als über einen Durchmesser einen Halbkreis, welcher den gegebenen Kreis in dem Punkt F schneidet, ziehet man nun AF, so ist AF die verlangte Tangente.

Fig. 166.



Beweis. Man ziehe FC, so ist $\angle$AFC=R (§. 149. Z. 4.); folglich AF eine Tangente (§. 154.)

Zusatz. Wenn man über dem Durchmesser AC den ganzen Kreis vollendet, so wird der gegebene Kreis in zwei Punkten F, E geschnitten, zieht man noch AE, so ist AE eine zweite Tangente. Nun ist $\angle$F=$\angle$E=R, FC=EC (als Halbmesser) und AC=AC, folglich (nach §. 47. Z. 2.) $\triangle FAC \cong \triangle EAC$, daher AF=AE und $\angle$FAC=$\angle$EAC. Nämlich von einem Punkt außerhalb des Kreises sind an diesen zwei Tangenten möglich und zwar sind diese Tangenten einander gleich, und der Tangentenwinkel FAE, d. h. der Winkel, den die beiden Tangenten am Punkte A

bilden, wird durch den verlängerten Halbmesser AC des Kreises halbirt.

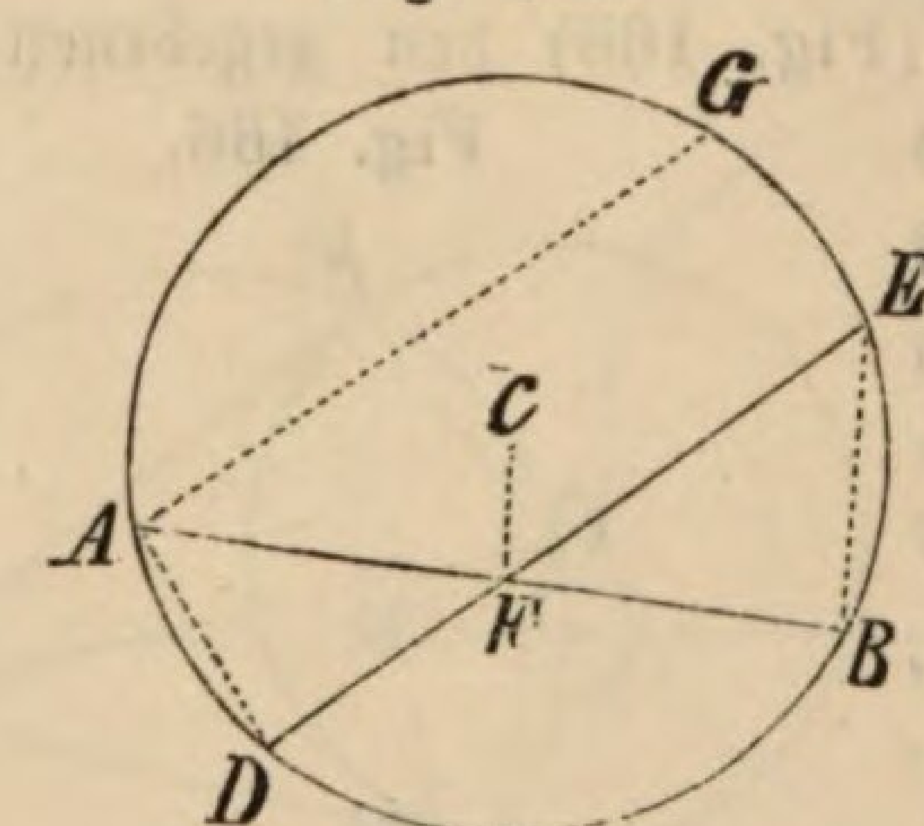
§. 156

Lehrsatz. Wenn sich im Kreise zwei Sehnen durchschneiden, so sind

I. diese Sehnen Durchmesser, wenn beide sich zugleich halbiren, außerdem kann nur eine von beiden oder auch keine halbirt seyn;

II. die abgeschnittenen Stücke dieser Sehnen sind sich umgekehrt proportionirt, oder die Rechtecke aus den zusammengehörigen Stücken dieser Sehnen sind einander gleich.

Fig. 167.



III. Der Winkel, den diese Sehnen einschließen, hat zum Maß die halbe Summe der beiden Bogen, die die Sehnen abschneiden. (Fig.167)

Beweis I. Die beiden Sehnen AB und DE durchschneiden sich in F, und F sey nicht der Mittelpunkt des Kreises, sondern C; so kann, wenn man CF zieht, F entweder die Mitte von AB oder von DE seyn. Im ersten Fall wäre ∠ CFA = R, und im zweiten Fall ∠ CFD = R (§. 150 II). Weil aber von beiden Fällen nur einer Statt finden kann, (denn sonst müßte ∠ CFA = ∠ CFD seyn); so folgt, daß von diesen außerhalb des Mittelpunktes sich durchschneidenden Sehnen nur eine halbirt seyn kann. Fällt aber der Durchschnittspunkt F in C, so halbiren sich beide Sehnen zugleich, sind aber jetzt Durchmesser (§. 151 Z.) Ferner ist weder ∠ CFA noch ∠ CFD nothwendig ein Rechter, daher können sich zwei Sehnen durchschneiden, ohne sich zu halbiren.

Beweis II. Ziehet man AD und EB, so ist ∠ ADE = ∠ ABE

und $\angle DAB = \angle DEB$ (§. 149 Z. 2); folglich $\triangle ADF \sim \triangle BEF$ (§. 66.); daher

$$AF : DF = FE : FB, \text{ d. h.}$$

die abgeschnittenen Stücke dieser Sehnen sind umgekehrt proportionirt, und wenn man diese Proportion in eine Gleichung verwandelt, ist

$$AF . FB = DF . FE, \text{ d. i.}$$

die Rechtecke aus den zusammengehörigen Stücken der Sehnen sind einander gleich.

Beweis III. Zieht man $AG \parallel DE$, so ist $\angle BAG = \angle BFE$; es ist aber $\angle BAG = \frac{1}{2}$ arc. $GB = \frac{1}{2}$ (arc. GE + arc. EB) (§. 149 Z. 1). Nun ist arc. GE = arc. AD (§. 149 Z. 7); daher $\angle BAG = \angle BFE = \frac{1}{2}$ (arc. AD + arc. EB.)

Zusatz. Ist der Durchschnittspunkt F der beiden Sehnen zugleich der Mittelpunkt, so ist arc. BE = arc. AD (§. 27 Z. 1), folgl. $\angle BFE = \frac{1}{2}$ (arc. BE + arc. BE) = arc. BE, wie es für den Centriwinkel seyn muß.

Ist der Durchschnittspunkt F aber ein Punkt in der Peripherie, so ist arc. AD = 0, und daher $\angle BFE = \frac{1}{2}$ arc. BE; wie es für den Peripheriewinkel seyn muß.

§. 157.

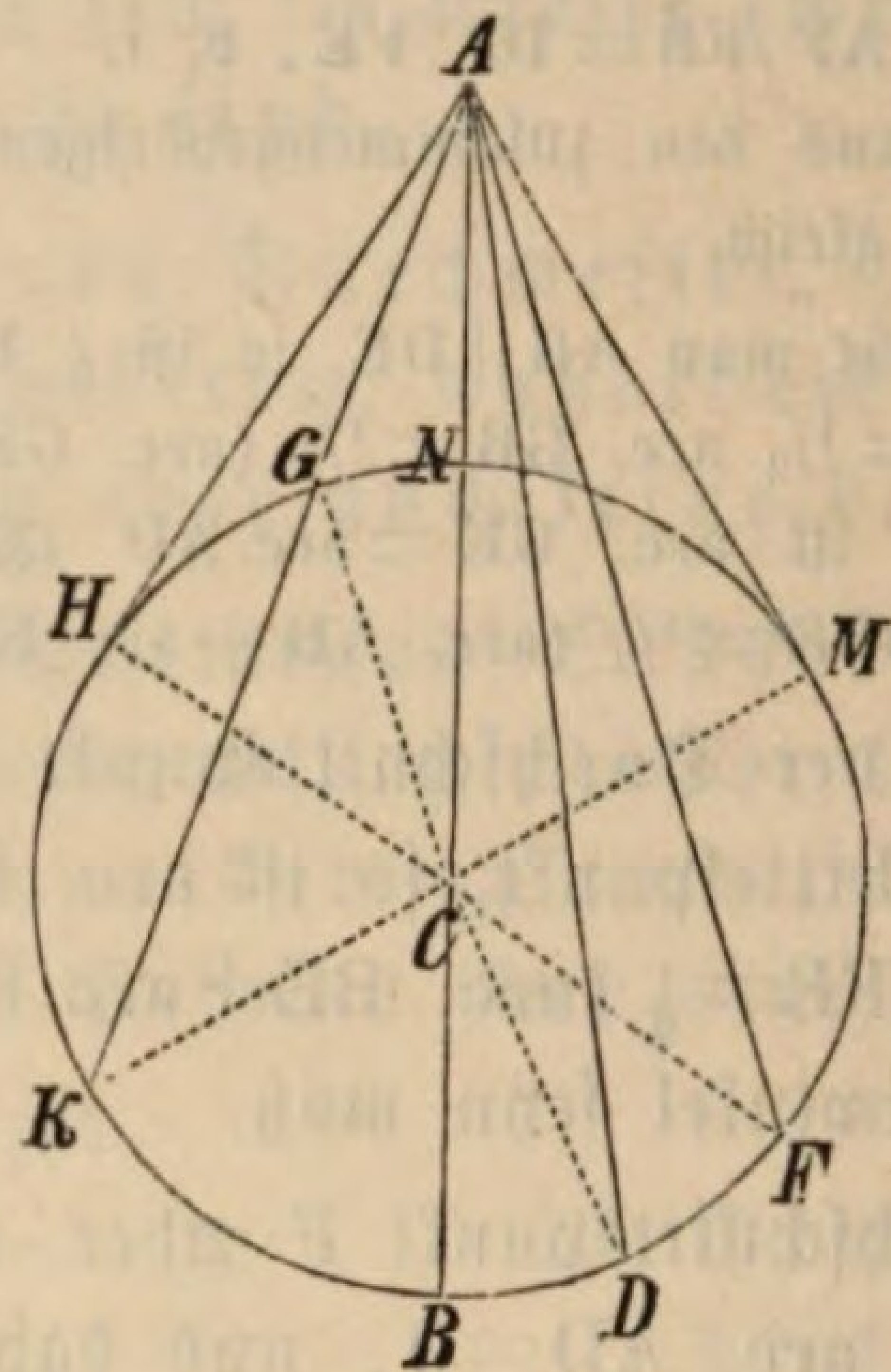
Lehrsatz.

I. Wenn man von einem außerhalb des Kreises gelegenen Punkte A mehrere gerade Linien bis an den concaven Theil des Kreises zieht, so ist die Gerade, die durch den Mittelpunkt geht die größte; die übrigen aber werden um so kleiner, je mehr sie sich von dieser größten entfernen.

II. Von allen Geraden, die von dem Punkte A an den convexen Theil der Peripherie des Kreises gezogen werden, ist jene die kürzeste, deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht, die übrigen werden um so größer, je mehr sie sich von dieser kleinsten entfernen.

III. Auch lassen sich nur je zwei gleiche gerade Linien von dem Punkte A an die Peripherie des Kreises ziehen. (Fig 168.)

Fig. 168.



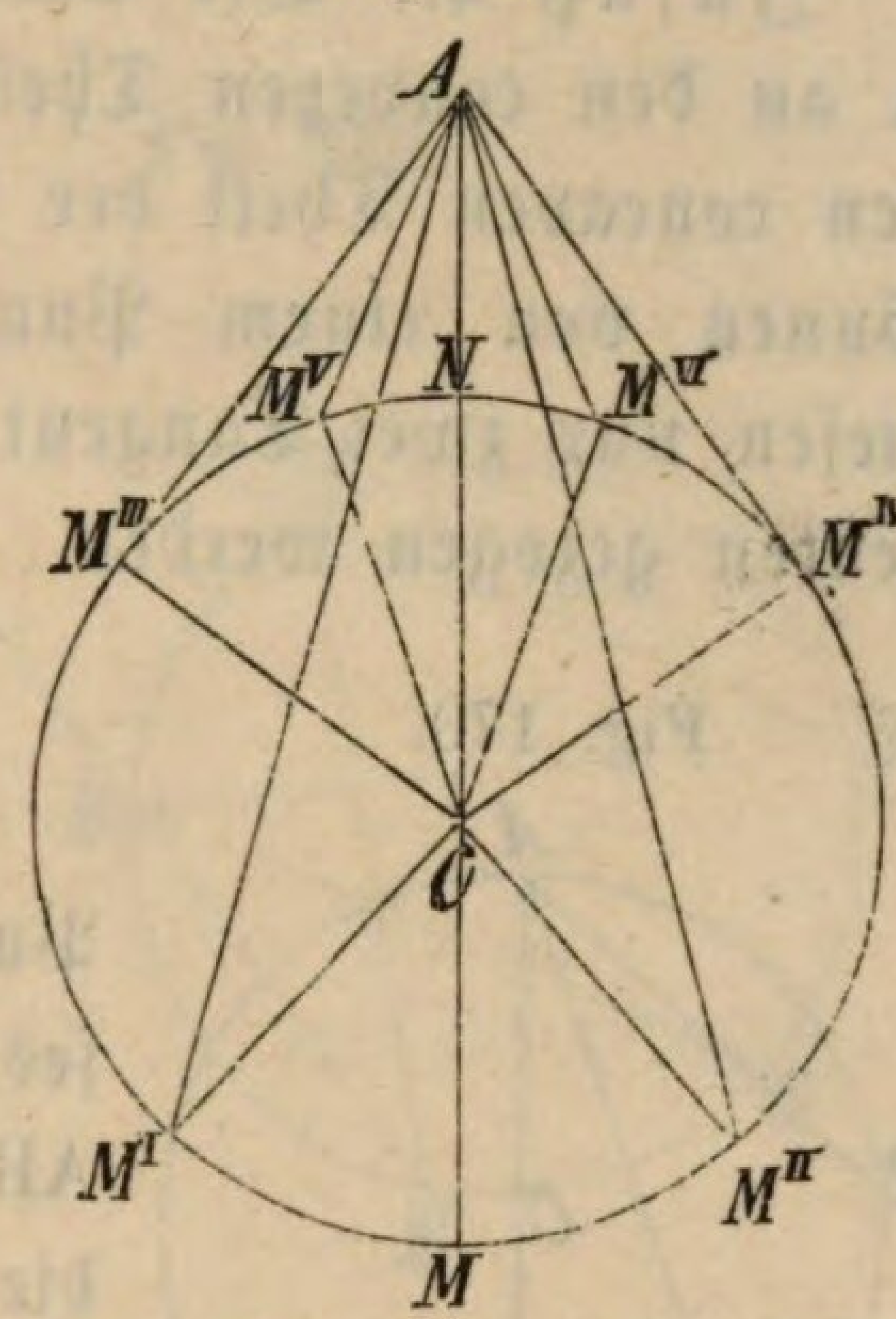
Beweis I. Es ist AC + CD > AD (§. 46 Z. 3.) und weil BC = CD, so ist auch AC + CB > AD, d. h. AB > AD. Ferner ist AD > AF (§. 48. I.)

Beweis II. AG + GC > AC und weil GC = NC, so ist
AG > AC − NC oder AG > AN.
Weiter ist AH > AG (§. 48 I.)

Beweis III. Die Dreiecke ACH, ACM, so wie ACK und ACF haben die eine Seite AC gemeinschaftlich, und zur andern Seite immer den Halbmesser des Kreises CH, CM, CK, CF. Jedem Dreieck ACH der einen Seite von AC entspricht daher immer nur **ein** Dreieck ACM der andern Seite, denn ∠ HCA läßt sich nur einmal als gleicher Winkel auf die andere Seite legen; ist ∠ HCA = ∠ MCA, so muß auch AH = AM seyn (§. 38) und jede andere Gerade, etwa AF ist ≷ AH, weil ∠ FCA ≷ ∠ HCA. Ganz ähnlich ist es mit den Dreiecken AKC und AFC, wenn ∠ KCA = ∠ FCA ist.

Zusatz 1. Nimmt (Fig. 169) man in der Peripherie eines Kreises mehrere Punkte M, M', M'', M''' an, und zieht

Fig. 169.



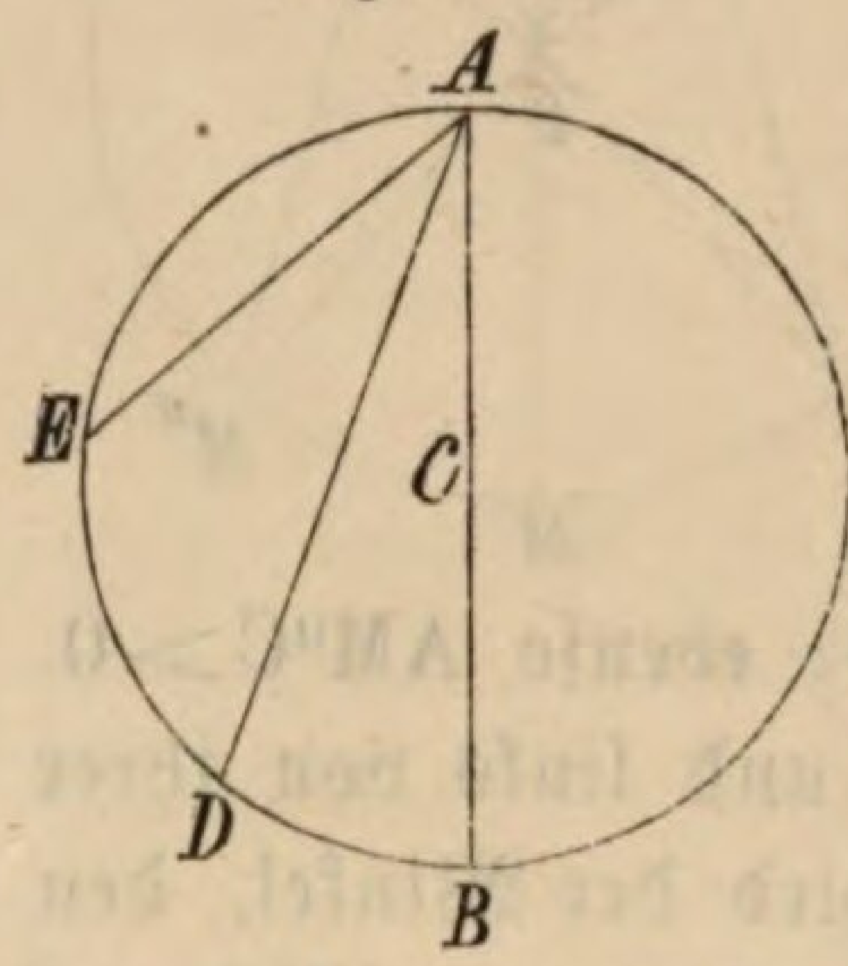
die Geraden AM, AM^{I}, AM^{II}, AM^{III}, so wie die Halbmesser CM, CM^{I}, CM^{II}, CM^{III}, so ist folgendes klar:

Liegt der Punkt M in der Verlängerung von AC, so ist $\angle AMC = 0$. Bewegt sich der Punkt M in der Peripherie des Kreises weiter, entfernt er sich von M und kommt entweder rechts oder links von seinem vorigen Ort wie M^{I} oder M^{II} zu stehen, so wird dadurch der Winkel AMC größer, nämlich $AM^{I}C > 0$; ebenso $AM^{II}C > 0$. Jemehr sich diese Punkte M^{I}, M^{II} rechts und links von ihrer ersten Lage M entfernen, desto größer wird der Winkel, den die Secante mit dem Halbmesser bildet, bis er endlich auf beiden Seiten, in M^{III} und M^{IV} gleich einem Rechten wird, nämlich $AM^{III}C = AM^{IV}C = R$ und in diesem Fall sind AM^{III} und AM^{IV} Tangenten.

Bewegen sich die Punkte M^{III}, M^{IV} weiter, so wird der Winkel größer als R; die Geraden AM^{V}, AM^{VI} treffen aber auch nicht mehr den concaven, sondern den convexen Theil der Peripherie, während die Punkte M^{V}, M^{VI} jetzt der Geraden CM in der entgegengesetzten Richtung, d. h. in ihrer rückwärtsgelegenen Verlängerung sich wieder nähern. Auch sieht man wohl ein, daß jede Gerade von A an die Peripherie des Kreises gezogen, diese in zwei Punkten durchschneidet, ausgenommen den Fall, in welchem auf beiden Seiten die zwei Punkte in einem zusammenfallen und $AM^{III}C = AM^{IV}C = R$ oder sowohl AM^{III} als auch AM^{IV} eine Tangente ist. So lange diese Winkel spitz sind, liegt M von A aus gesehen in dem concaven Theil und wird dieser Winkel stumpf, liegt der Punkt M in dem convexen Theil der Peripherie.

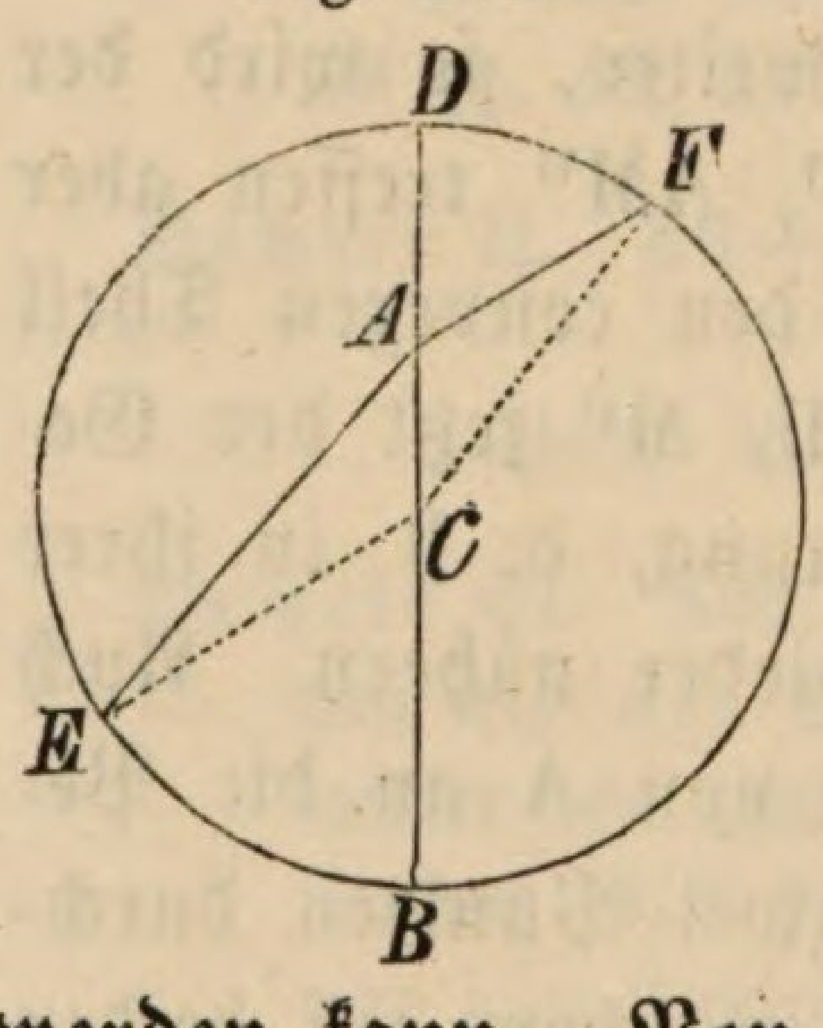
Zusatz 2. Die Tangente ist also größer als jede von A an den convexen Theil, und kleiner als jede von A an den concaven Theil der Peripherie gezogene Gerade. Auch können von einem Punkt A außerhalb eines Kreises an diesen nur zwei Tangenten und zwar nur zwei gleiche Tangenten gezogen werden.

Fig. 170.



Zusatz 3. Liegt (Fig. 170) der Punkt A in der Peripherie des Kreises, so ist ferner klar, daß die Gerade AB, die durch den Mittelpunkt geht, die größte ist; daß alle andern Geraden wie AD, AE kleiner sind als AB, und zwar um so kleiner, je weiter sie sich entfernen und daß von A aus sich nur je zwei gleiche gerade Linien, die eine diesseits, die andere jenseits von AB, an die Peripherie des Kreises ziehen lassen.

Fig. 171.



Zusatz 4. Liegt (Fig. 171) der Punkt A innerhalb des Kreises, aber nicht im Mittelpunkt, so ist die Gerade AB, die durch den Mittelpunkt geht, die größte, dagegen die Gerade AD, deren Verlängerung durch den Mittelpunkt geht, die kleinste Gerade, die durch A an die Peripherie gezogen werden kann. Von den übrigen ist jede um so größer, je näher sie der größten, und um so kleiner, je näher sie der kleinsten liegt; auch lassen sich nur je zwei gleiche Gerade vom Punkte A aus an die Peripherie ziehen.

Denn $AC + CE > AE$, also $AB > AE$. Ferner $AC + AD = CF$, aber $AC + AF > CF$, daher $AF > AD$. Das Uebrige läßt sich leicht darthun.

§. 158.

Lehrsatz.

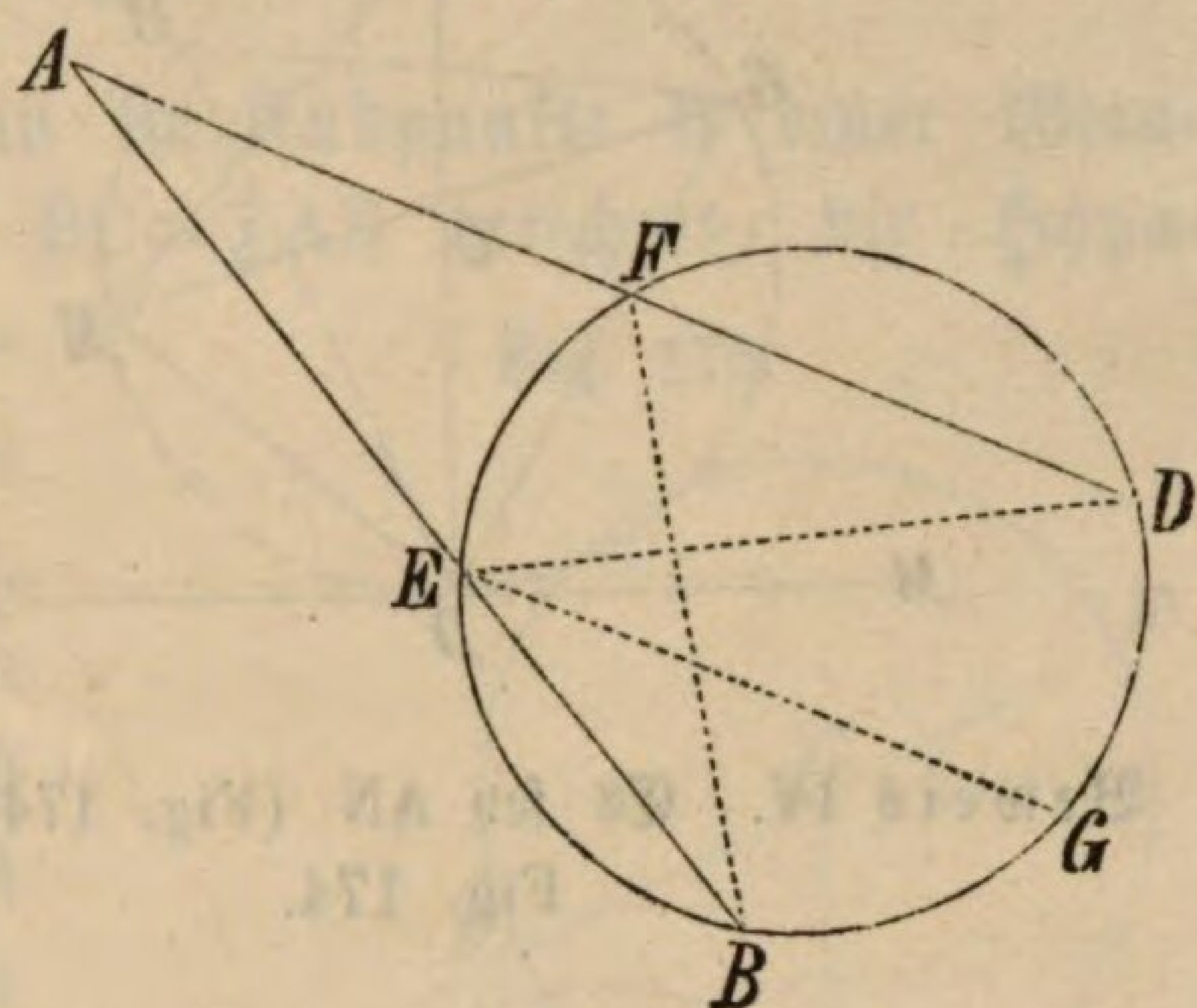


Fig. 172.

I. Wenn man von einem Punkte A (Fig. 172) außerhalb des Kreises zwei Secanten AB und AD an den concaven Theil der Peripherie zieht, so sind die Abschnitte AE und AF außerhalb des Kreises den Secanten selbst umgekehrt proportionirt, oder die Rechtecke aus den Secanten und ihren äusseren Abschnitten sind einander gleich.

II. Der Winkel, den die beiden Secanten bilden, hat die halbe Differenz der zwischen ihnen liegenden Bogen zum Maß.

III. Der Winkel, den die Tangente mit der Sehne im Berührungspunkte macht, ist gleich dem Winkel im entgegengesetzten Kreisabschnitt.

IV. Die Tangente ist die mittlere Proportionale zwischen der Secante und ihrem äusseren Abschnitt.

Beweis I. Zieht man BF und DE, so ist, weil $\angle A = \angle A$ und $\angle ABF = \angle ADE$ (§. 149 Z. 2) $\triangle ABF \sim \triangle ADE$, daher

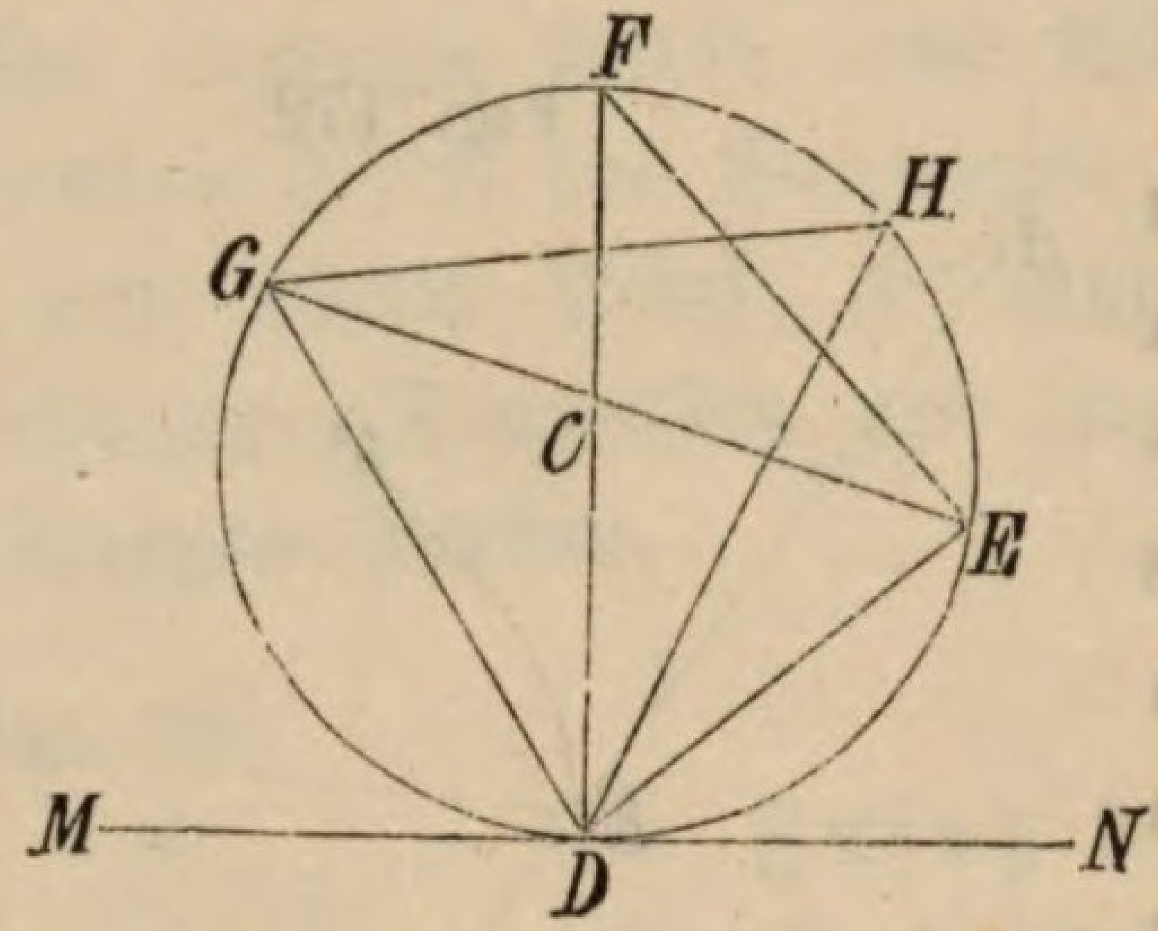
$$AB : AD = AF : AE, \text{ und daraus}$$

$$AB . AE = AD . AF.$$

Beweis II. Zieht man $EG \parallel AD$, so ist $\angle BEG = \angle BAD$. Nun ist $\angle BEG = \frac{1}{2}$ arc. BG $= \frac{1}{2}$ (arc. BD — arc. GD) $= \frac{1}{2}$ (arc. BD — arc. EF); weil arc. GD = arc. EF (§. 149. Z. 7.)

Beweis III. Es sey MN (Fig. 173) eine Tangente, D ihr Berührungspunkt, so ist der Durchmesser $FD \perp MN$; ferner sei DE eine

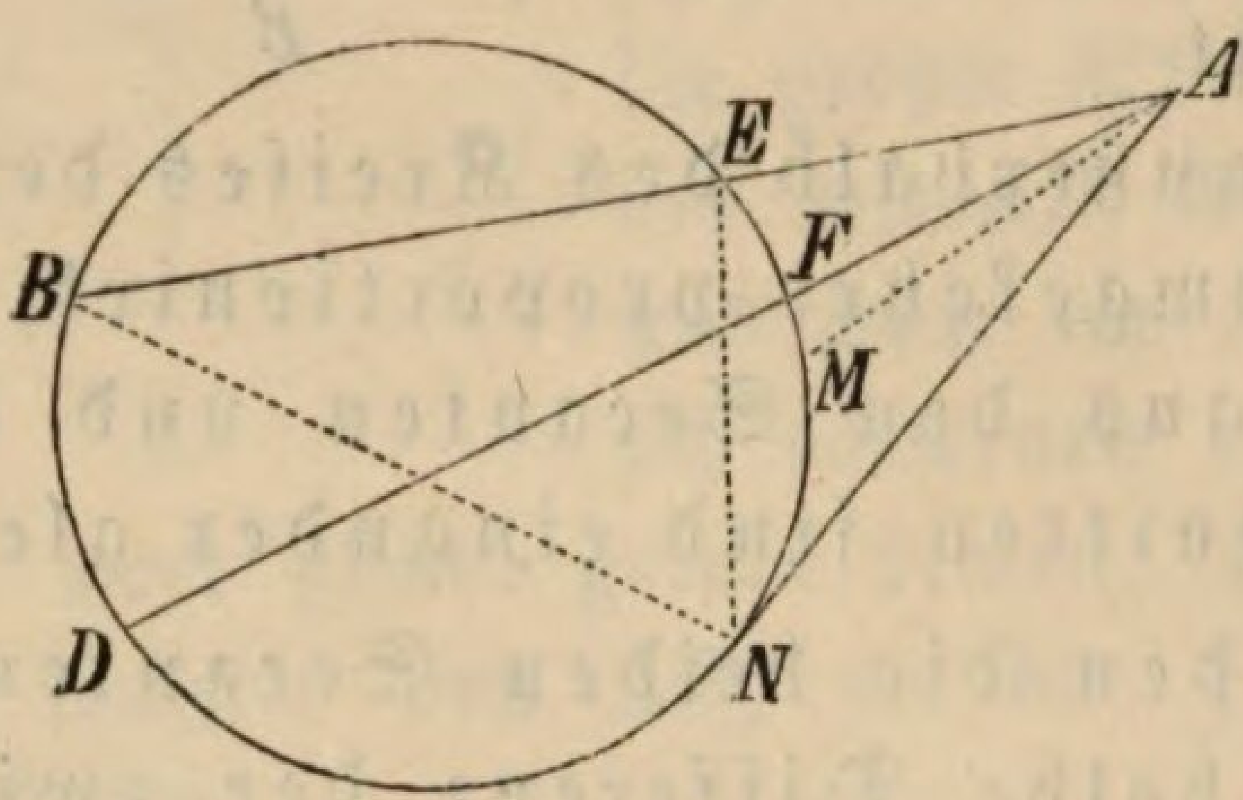
Fig. 173.



Sehne; zieht man EF, so ist $\angle FED = R$ (§. 149 Z. 4), folgl. auch $\angle DFE + \angle EDF = R$. Es ist aber auch $\angle FDE + \angle EDN = R$; daher $\angle DFE = \angle EDN$, und weil $\angle DFE = \angle DGE$, (§. 149. Z. 2) so ist $\angle DGE = \angle EDN$. Eben so ist $\angle GHD = \angle GDM$.

Beweis IV. Es sey AN (Fig. 174) eine Tangente, N der Berührungspunkt, AB eine Secante. Zieht man EN und BN, so ist, weil $\angle A = \angle A$ und $\angle NBE = \angle ANE$ (S. v. Beweis) ist $\triangle ABN \backsim \triangle AEN$; daraus ergibt sich

Fig. 174.



$$AB : AN = AN : AE.$$

Dieser Satz hätte sich auch also erweisen lassen:

Nach Beweis I. dieses Lehrsatzes ist

$$AB : AF = AD : AE;$$

denkt man sich nun die Secante AD von der Secante AB sich hinweg bewegen, so treten die Punkte F und D näher aneinander und fallen endlich im Punkte N zusammen. In diesem Fall ist die Secante zur Tangente geworden (§. 153) und $AF = AD = AN$. Setzt man für AF und AD in der obigen Proportion den gleichen Werth AN so erhält man

$$AB : AN = AN : AE.$$

Zusatz 1. Findet unter den Linien an einem Kreis folgende Proportion $AB : AN = AN : AE$ Statt, so ist AB die Secante und AN die Tangente des Kreises.

Denn wäre AN nicht die Tangente, sondern irgend eine andere Gerade, etwa AM, so wäre

$AB : AM = AM : AE$, es ist aber

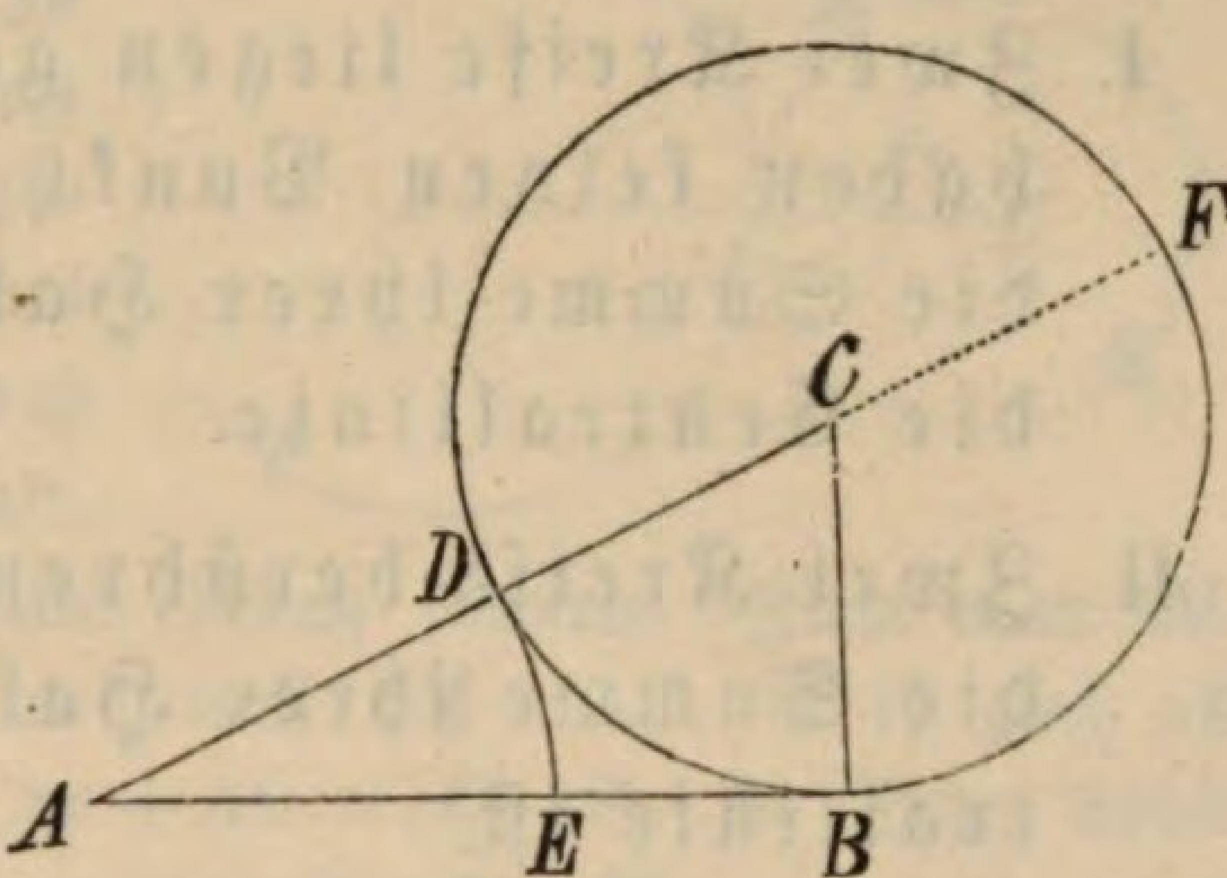
$AB : AN = AN : AE$. (V. D. V.)

folglich wäre $AM = AN$, welches gegen (§. 157.); daher

AM keine Tangente. Dieses gilt von jeder von A an die Peripherie gezogenen Geraden nach irgend einem Punkte, ausgenommen N, daher AN die Tangente.

Zusatz 2. Wenn man im Endpunkte B einer Geraden BA, eine Senkrechte $BC = \frac{1}{2}AB$ errichtet, die Hypotenuse AC zieht, um C einen Kreis mit dem Halbmesser $CB = \frac{1}{2}AB$ beschreibt, der die Hypotenuse AC in D schneidet, und endlich $AE = AD$ abschneidet, so ist die Gerade AB im Punkte E nach dem äußeren und mittleren Verhältniß getheilt. (Fig. 175.)

Fig. 175.



Nämlich es verhält sich sodann das kleinere Stück EB zum größern Stück AE, wie dieses größere Stück AE zur ganzen Geraden AB.

Denn verlängert man AC bis die Peripherie des Kreises in F getroffen ist, so ist $AD : AB = AB : AF$,

oder $(AB - AD) : AD = (AF - AB) : AB$

$(AB - AE) : AE = AD : AB$, d. h.

$EB : AE = AE : AB$.

Diese Theilung der Geraden AB wird der goldene Schnitt, oder auch die Theilung nach stetiger Proportion, und das größere Stück von AB, d. i. AE die Mediane genannt.

§. 159.

Erklärung. Haben zwei Kreise einerlei Mittelpunkt, so heißen sie concentrisch; haben sie verschiedene Mittelpunkte, excentrisch, und die Gerade, die ihre Mittelpunkte verbindet, heißt Centrallinie (Centrale.)

Von zwei Kreisen, die zwei Punkte gemeinschaftlich haben, sagt man, sie schneiden sich in denselben, und die einen Punkt gemeinschaftlich haben, berühren sich in demselben; diese Berührung kann geschehen von Innen oder von Außen.

Zwei Kreise können auch, hinsichtlich ihrer Lage, ganz außereinander, oder zum Theil ineinander liegen, oder der eine liegt ganz innerhalb des andern.

§. 160.

Lehrsatz.

I. Zwei Kreise liegen ganz außereinander und haben keinen Punkt gemeinschaftlich, wenn die Summe ihrer Halbmesser kleiner ist, als die Centrallinie.

II. Zwei Kreise berühren sich von Außen, wenn die Summe ihrer Halbmesser gleich der Centrallinie ist.

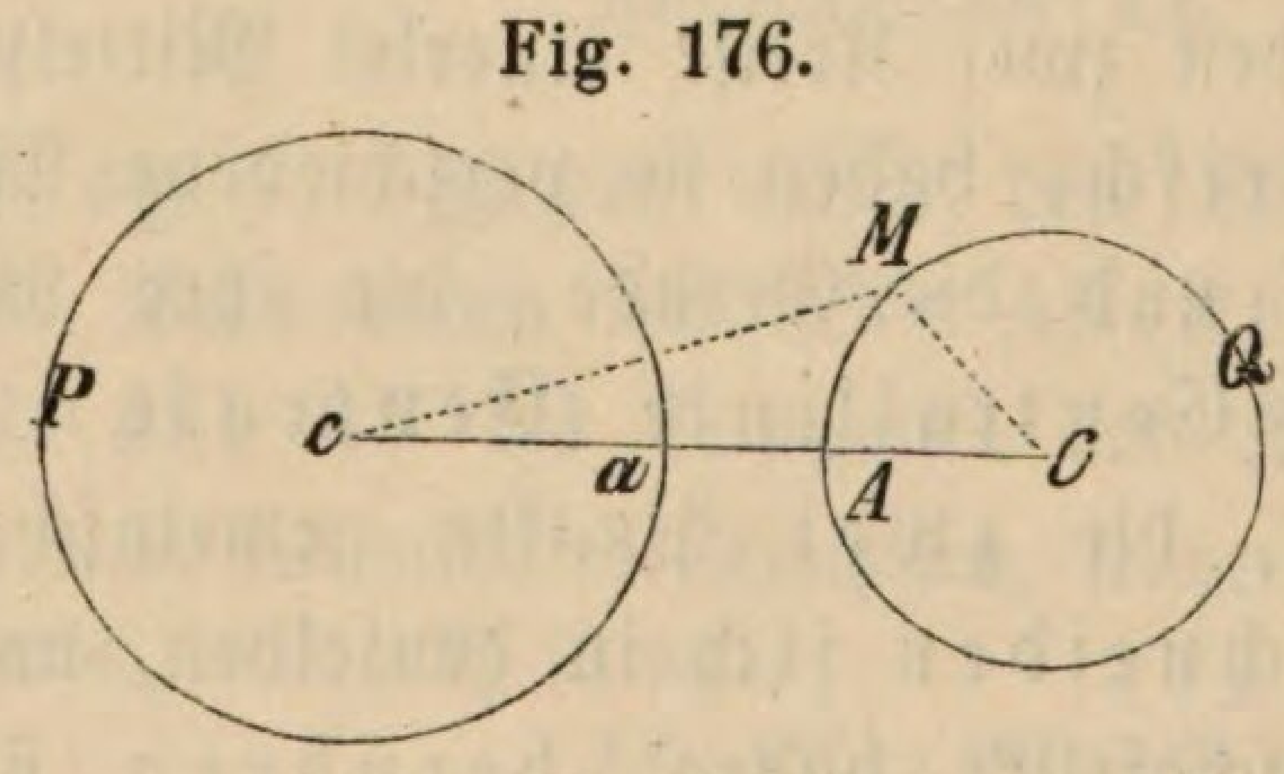
III. Zwei Kreise schneiden sich, wenn die Summe ihrer Halbmesser größer, und jeder Halbmesser kleiner, als die Centrallinie ist.

IV. Zwei Kreise berühren sich von Innen, wenn die Differenz ihrer Halbmesser gleich der Centrallinie ist.

V. Zwei Kreise liegen ineinander und haben keinen Punkt gemeinschaftlich, wenn die Differenz ihrer Halbmesser größer als die Centrallinie ist.

Beweis I. Es sey (Fig. 176) $ac + AC < Cc$, so ist auch $ac < Cc - AC$, oder $ac < Ac$, d. h. der Punkt A der Peripherie Q liegt außerhalb des Kreises P. Jeder andere Punkt M der Peripherie des Kreises Q ist vom Mittelpunkt c des Kreises P noch weiter entfernt, als der Punkt A; denn zieht man cM, CM, so ist $cM + MC > cC$ (§. 46. Z. 3), oder $cM + MC > Ac + AC$; nun ist $MC = AC$, daher $cM > Ac$. Mithin können die Kreise P und Q

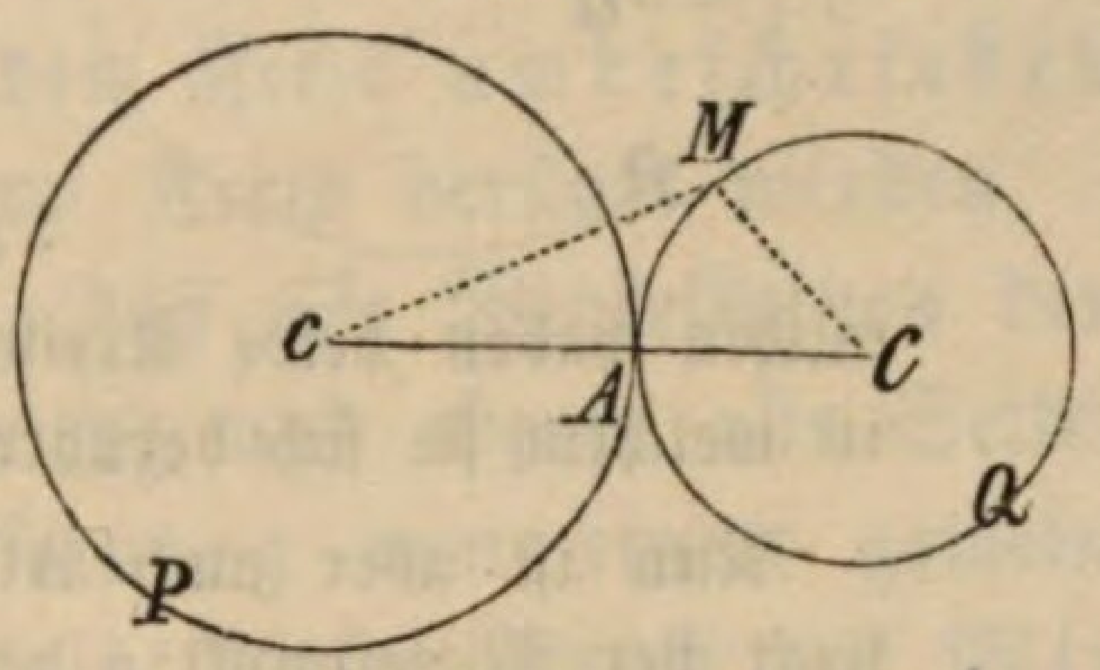
Fig. 176.



keinen Punkt gemeinschaftlich haben, denn es liegt jeder Punkt der Peripherie des Kreises Q außerhalb der Peripherie des Kreises P, daher müssen beide Kreise gänzlich auseinander liegen.

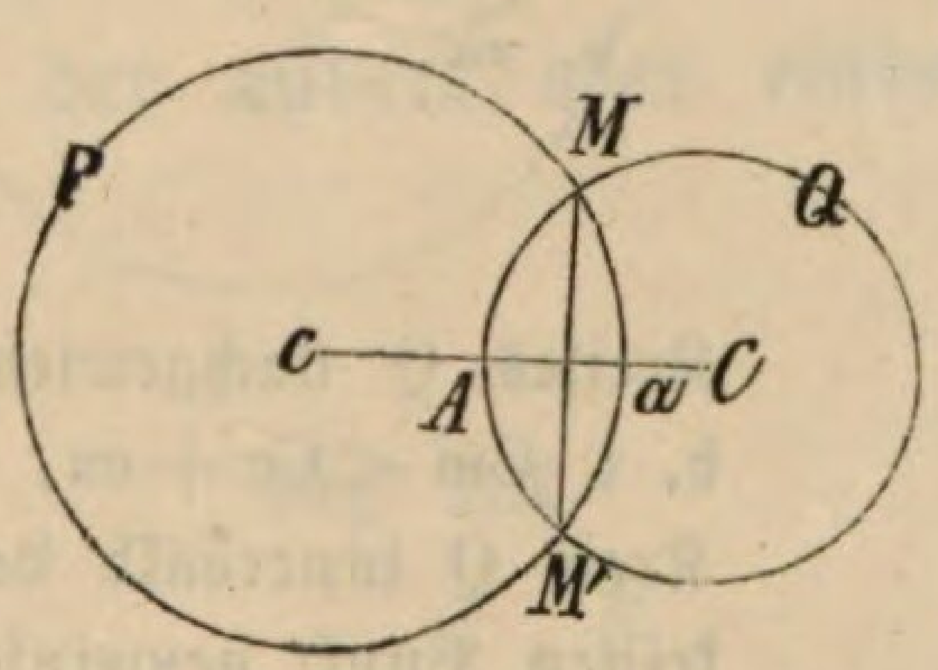
Beweis II. Es sey (Fig. 177) Ac+AC=cC, und folglich der Punkt A sowohl in der Peripherie des Kreises P als auch in der des Kreises Q gelegen. Ist A der einzige gemeinschaftliche Punkt beider Kreise, so berühren sie sich (§. 159). Es kommt also darauf an darzuthun, daß beide Kreise keinen zweiten Punkt, etwa M, weiter gemeinschaftlich haben können.

Fig. 177.



Zieht man cM, CM, so ist cM+CM>cC, und weil CM=AC, so ist auch cM+AC>cC. Es ist aber Ac+AC=cC (V. D. B.); daher Ac<cM, d. h. die Entfernung des Punktes M, und also jedes Punktes der Peripherie Q ist vom Mittelpunkt c größer, als der Halbmesser Ac, folglich haben beide Peripherien außer A keinen Punkt gemeinschaftlich.

Fig. 178.



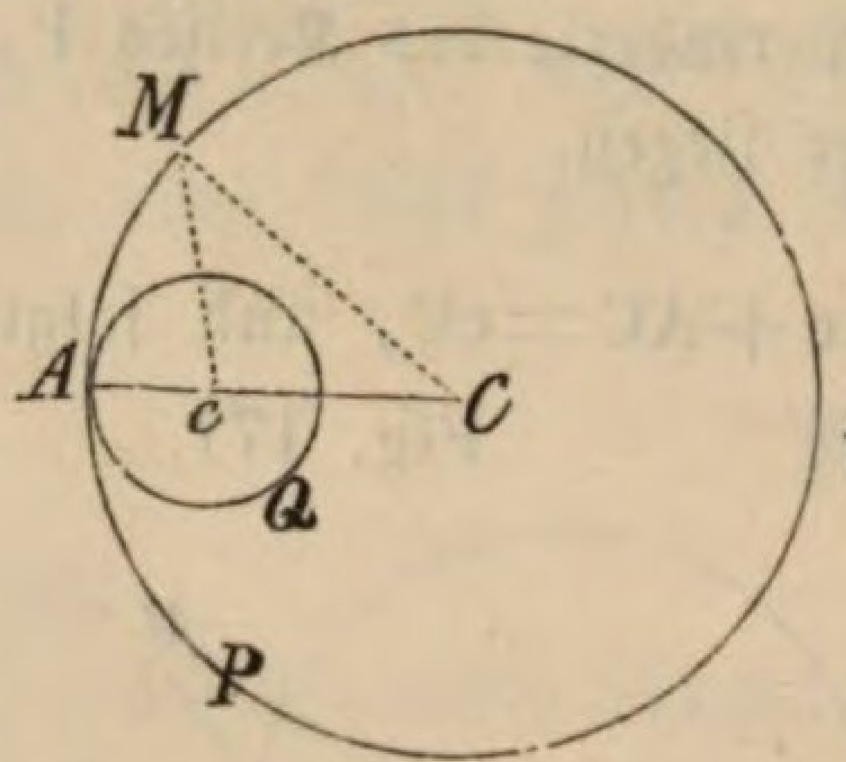
Beweis III. Es sey (Fig. 178)

ac+AC>cC; so ist auch
AC>cC—ac, oder
AC>aC;
auch sey AC<Cc.

Beschreibt man nun mit einem Halbmesser AC um den Mittelpunkt C den Kreis Q, so liegt (weil AC>aC) der Punkt a innerhalb des Kreises Q, der Punkt c aber außerhalb (weil AC<cC) dieses Kreises. Wenn daher um den Mittelpunkt c mit dem Halbmesser ac ein Kreis P beschrieben wird, so muß die Peripherie des Kreises Q zweimal geschnitten werden, nämlich einmal, wenn bei der Beschreibung des Kreises P der Punkt a aus der Peripherie des Kreises Q heraus (bei M) und sodann, wenn er wieder hineingeht (bei M'); mithin schneiden sich beide Kreise in zwei Punkten.

Beweis IV. Es sey (Fig. 179) Cc=AC—Ac. Beschreibt man um C, c mit den Halbmessern AC, Ac die Kreise P, Q, so haben beide Kreise nur den Punkt A gemeinschaftlich; denn jeder

Fig. 179.



andere Punkt M des Kreises P liegt außerhalb des Kreises Q; nämlich

$Cc > CM - cM$ (§. 46 Z. 4.)

Nun ist $Cc = AC - Ac$ (B. D. B.)

folglich $AC - Ac > CM - cM$, oder

$AC + cM > AC + Ac$

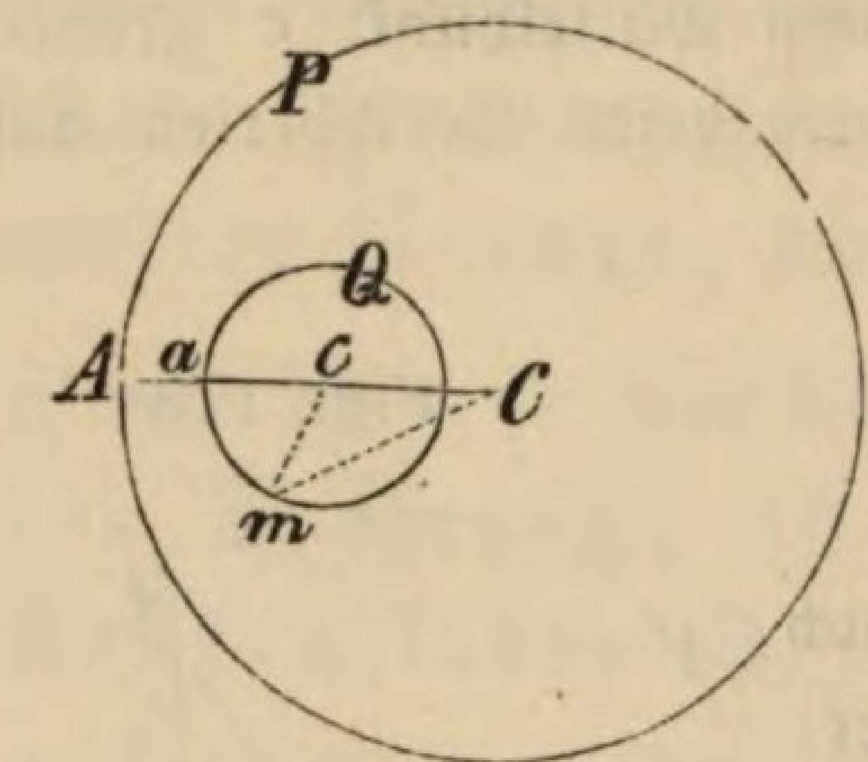
$cM > Ac$;

daher M außerhalb des Kreises Q; mithin haben beide Kreise nur einen Punkt A gemeinschaftlich, in welchem sie sich berühren.

Nun ist aber auch $AC = Cc + Ac$, oder $AC > Cc$; folglich liegt der Mittelpunkt c des Kreises Q innerhalb des Kreises P, daher geschieht die Berührung von Innen.

Beweis V. Es sey (Fig. 180) $CA - ca > Cc$, oder $CA > Cc + ca$, d. h. $CA > Ca$. Beschreibt man nun mit den Halbmessern AC, ac um die Mittelpunkte C, c die Kreise P, Q, so ist, weil $Cc < AC$, der Mittelpunkt c des Kreises Q innerhalb des Kreises P, und weil $CA > Ca$, liegt der Punkt a der Peripherie des Kreises Q ebenfalls innerhalb des Kreises P, und da dieses von jedem Punkt m der Peripherie des Kreises Q nachgewiesen werden kann (nämlich $Cm < Cc + cm$, d. i. $Cm < Cc + ca$, also um so mehr $Cm < CA$), so liegt der Kreis Q innerhalb des Kreises P, und beide Kreise haben gar keinen Punkt gemeinschaftlich.

Fig. 180.



Zusatz 1. Wenn sich daher zwei Kreise berühren, so geht die Centrallinie durch den Berührungspunkt, und weil in diesem Berührungspunkt nur eine Senkrechte auf der Centrallinie errichtet werden kann (§. 53 I), so folgt, daß zwei Kreise, die sich berühren, im Berührungspunkt eine gemeinschaftliche Tangente haben.

Zusatz 2. Zwei Kreise, die sich schneiden, haben eine gemeinschaftliche Sehne und die Centrallinie geht senkrecht durch die Mitte dieser Sehne.

§. 161.

Erklärung. Eine Figur heißt dem Kreis einbeschrieben oder der Kreis ist der Figur umbeschrieben, wenn alle Winkelspitzen der Figur in der Peripherie des Kreises liegen. Der Figur ist aber der Kreis einbeschrieben, oder die Figur ist dem Kreis umbeschrieben, wenn alle Seiten der Figur vom Kreis berührt werden.

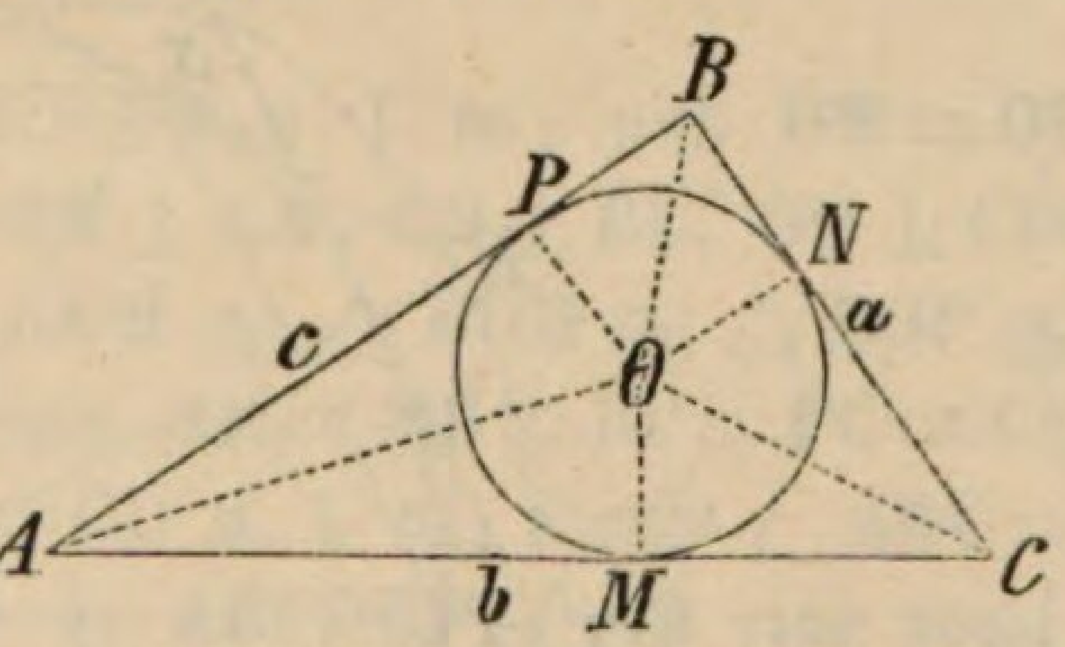
Ist eine Figur so beschaffen, daß alle Winkelspitzen derselben in einer gleichen Entfernung und ebenso alle Seiten derselben in einer gleichen Entfernung von einem gemeinschaftlichen Punkt liegen, so heißt dieser Punkt der Mittelpunkt der Figur.

Zusatz 1. Also sind die Seiten der dem Kreis einbeschriebenen geradlinigen Figuren nichts anderes als Sehnen, und die Seiten, der dem Kreis umschriebenen geradlinigen Figuren nichts anderes als Tangenten.

Zusatz 2. Der Mittelpunkt einer Figur ist zugleich der Mittelpunkt zweier concentrischer Kreise, von denen der eine dieser Figur umschrieben, der andere aber einbeschrieben werden kann.

§. 162.

Fig. 181.



Lehrsatz. Jedem Dreieck ABC läßt sich ein Kreis umschreiben und ein Kreis einschreiben. (Fig. 181)

Beweis. Man halbire die drei innern Winkel, so durchschneiden sich die drei Halbirungslinien in einem Punkt O (§. 76 XIV.) Fällt man OM ⊥ AC, ON ⊥ BC und OP ⊥ AB, so ist △AOM ≌ △AOP (§. 40), und ebenso △MOC ≌ △NOC. Daraus ergibt sich, daß OM = OP = ON; folglich O der Mittelpunkt eines Kreises, der, mit dem Halbmesser OM = OP = ON construirt die Seiten AC, AB, BC in den Punkten M, P, N berührt, folglich dem Dreieck ABC einbeschrieben (§. 161) ist.

Daß auch jedem Dreieck ein Kreis umschrieben werden kann, geht aus §. 152 Z. 5 deutlich hervor.

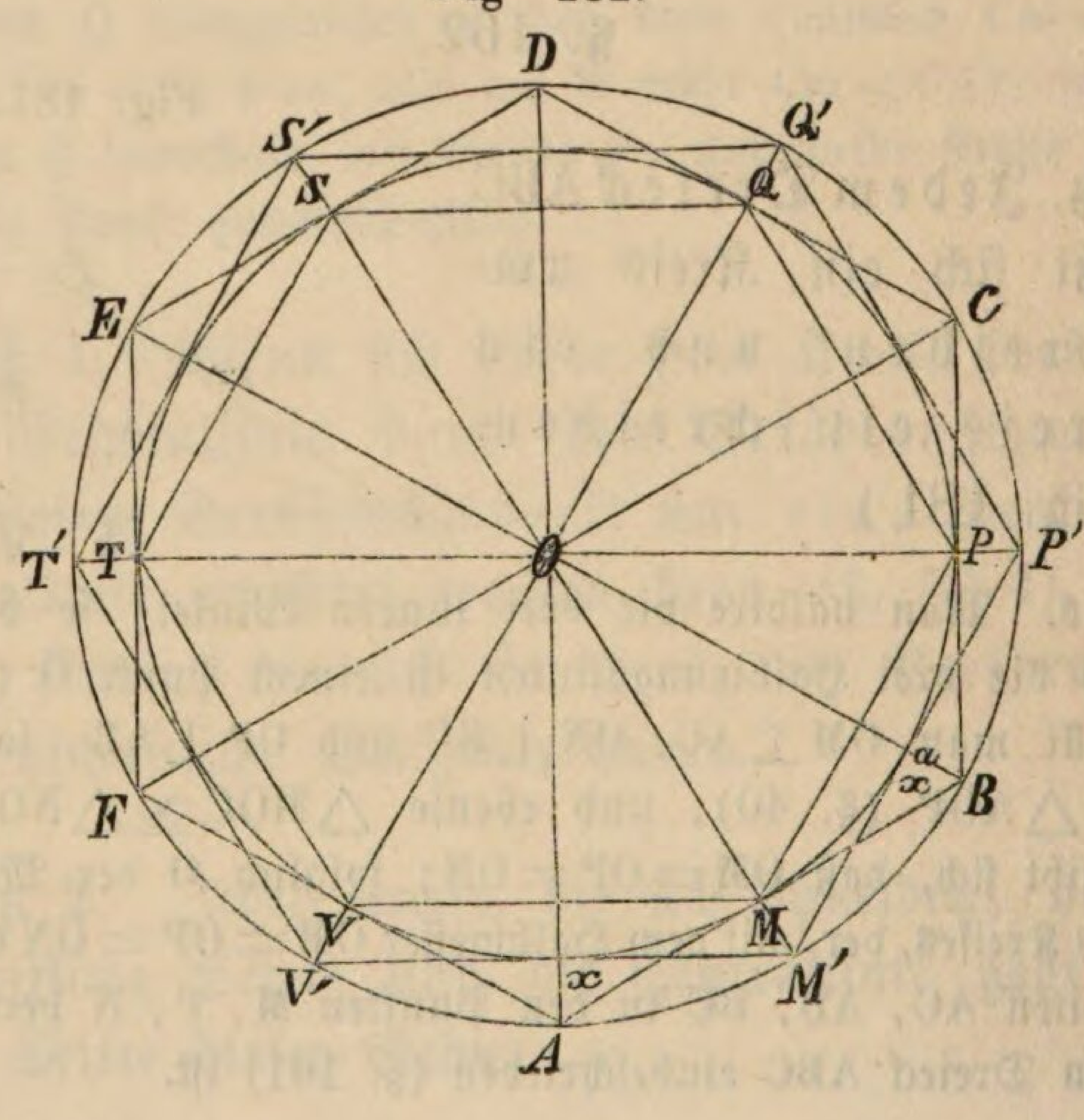
Zusatz 1. Der Mittelpunkt des einem Dreieck umschriebenen Kreises liegt außerhalb der Fläche des Dreiecks, wenn dieses stumpfwinklig ist; er liegt in der Hypotenuse, wenn das Dreieck rechtwinklig ist; und endlich innerhalb des Dreiecks, wenn dieses drei spitze Winkel hat (§. 149 Z. 4, 5.) Der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises liegt aber immer innerhalb der Fläche des Dreiecks.

Zusatz 2. Ist das Dreieck ungleichseitig oder bloß gleichschenkelig, so fallen die Mittelpunkte des umschriebenen und einbeschriebenen Kreises auseinander; ist das Dreieck aber gleichseitig, so fallen die Mittelpunkte aufeinander (§. 57. Z. 3.). Die beiden Kreise sind daher concentrisch; mithin hat unter allen Dreiecken nur das regelmäßige einen Mittelpunkt (§. 161 Z. 2.).

§. 163.

Lehrsatz. Jedem regelmäßigen Vieleck läßt sich ein Kreis umschreiben und ein Kreis einschreiben. (Fig. 182.)

Fig 182.



Beweis I. Es sey ABCDEF ein regelmäßiges Vieleck, (§. 18), also von der Beschaffenheit, daß $AB = BC = CD = DE$ u. s. w. und $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE$ u. s. w. Halbirt man $\angle FAB$ und $\angle ABC$ durch AO und OB, so ist $\triangle AOB$ gleichschenkelig, denn $\angle x = \angle x$; also $OA = OB$. Zieht man OC, so ist $\triangle OBC \cong \triangle OAB$ (§. 38); daher $OC = OB = OA$. Ebenso läßt sich zeigen, daß $OA = OD = OE$ u. s. w.; mithin geht ein Kreis, dessen Halbmesser OA und dessen Mittelpunkt O ist, durch die Winkelspitzen des regelmäßigen Vielecks ABCDEF, und daher läßt sich jedem regelmäßigen Vieleck ein Kreis umschreiben.

Beweis II. Man ziehe die Senkrechten OM, OP, OQ, OS u. s. w. auf die Seiten AB, BC, CD, DE u. s. w., so sind diese Senkrechten alle einander gleich (§. 56); mithin geht ein Kreis, dessen Halbmesser OM und dessen Mittelpunkt O ist, durch die Punkte P, Q, S u. s. w., auch sind AB, BC, CD, DE u. s. w. dessen Tangenten (§. 154 II); daher läßt sich in jedes regelmäßige Vieleck ein Kreis einschreiben.

Zusatz 1. Die zwei Kreise, von denen der eine dem regelmäßigen Vieleck umbeschrieben und der andere einbeschrieben ist, sind also concentrisch; daher hat jedes regelmäßige Vieleck einen Mittelpunkt.

Zusatz 2. Wenn sich um eine Figur ein Kreis umschreiben und zugleich ein concentrischer Kreis einschreiben läßt, also diese Figur einen Mittelpunkt hat, so ist sie regelmäßig.

Denn ist (Fig. 182) $AO = OB = OC = OD$ u. s. w., und $OM = OP = OQ = OS$ u. s. w., so wie $OM \perp AB$, $OP \perp BC$, $OQ \perp CD$, $OS \perp DE$ u. s. w.; so ist $\triangle AOM \cong \triangle BOM \cong \triangle BOP \cong \triangle COP \cong \triangle COQ$ u. s. w., daraus $AM = MB = BP = PC = CQ = QD$ u. s. w., oder $AB = BC = CD$ u. s. w., ebenso $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE$ u. s. w., d. h. ABCDEF... ist eine regelmäßige Figur.

Zusatz 3. Die Centriwinkel AOB, BOC, COD u. s. w. sind alle einander gleich, und die Größe derselben hängt offenbar von der Seitenanzahl des regelmäßigen Vielecks ab; nämlich jeder Centriwinkel $= \frac{4R}{n}$, wenn n die Anzahl

der Seiten des regelmäßigen Vielecks bezeichnet. Daher ist der Centriwinkel im regelmäßigen Dreieck $= \frac{4R}{3} = 120^0$, oder die Seite des dem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Dreiecks ist die Sehne, die zu einem Bogen von 120^0 gehört. So ist der Centriwinkel des regelmäßigen Vierecks $= \frac{4R}{4} = R = 90^0$, oder die Seite des dem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Vierecks ist die Sehne, die zu einem Bogen von 90^0 gehört, und ebenso ist die Seite des dem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Sechseck die Sehne, die zu einem Bogen von $\frac{4R}{6} = 60^0$ gehört u. s. w. Wäre man daher im Stande, die Peripherie eines Kreises in jede beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, oder alle die Winkel zu zeichnen, welche aliquote Theile von 4 R sind, so wäre man auch im Stande jedem gegebenen Kreis ein beliebiges regelmäßiges Vieleck einzuschreiben.

§. 164.

Aufgabe.

I. Es ist ein Kreis mit einem einbeschriebenen regelmäßigen Vieleck gegeben, man soll diesem Kreis ein ähnliches Vieleck umschreiben.

II. Es ist ein Kreis mit einem umschriebenen regelmäßigen Vieleck gegeben, man soll diesem Kreis ein ähnliches Vieleck einschreiben.

Auflösung I. a) Es sey MPQSTV das dem Kreis einbeschriebene regelmäßige Vieleck (Fig. 182), dessen Mittelpunkt O. Legt man durch die Punkte M, P, Q, S u. s. w. Tangenten (§. 155. I.), welche sich in den Punkten A, B, C, D u. s. w. schneiden werden (§. 16 Z. 6), so ist ABCDEF das verlangte umschriebene ähnliche Vieleck.

Beweis. Zieht man OA, OB, OC, OD u. s. w., so ist $\triangle VOA \cong \triangle MOA$ (§. 47 Z. 2); folglich halbirt OA den Centriwinkel

VOM; eben so läßt sich erweisen, daß OB den Centriwinkel MOP halbirt; daraus ergibt sich, weil $\angle$ VOM $=\angle$ MOP, daß $\angle$ VOM $=\angle$ AOB und weil OM $\perp$ AB (V. D. C.), so ist AO $=$ OB (§. 57 II); daher $\triangle$AOB $\sim$ $\triangle$VOM (§. 66 Z. 3). Auf gleiche Weise ist darzuthun, daß $\triangle$BOC $\sim$ $\triangle$POQ; $\triangle$COD $\sim$ $\triangle$QOS u. s. w.; mithin ist Vieleck ABCDEF $\sim$ Vieleck MPQSTV (§. 89 I.)

I. b) Man fälle (Fig. 182) durch MP senkrecht den Halbmesser Oa, lege durch a die Gerade M′ P′ senkrecht zu Oa und verlängere die Halbmesser OM, OP bis M′ P′ in M′,P′ geschnitten ist, so ist M′ P′ die Seite des umschriebenen ähnlichen Vielecks.

Beweis. $\triangle$OM′P′ $\sim$ $\triangle$OMP (§. 66) und so wird nachgewiesen werden können, daß M′P′Q′S′T′V′ $\sim$ MPQSTV ist.

Auflösung II. Man ziehe die Halbmesser M′O, P′O, Q′O, u. s. w. verbinde die dadurch entstandenen Durchschnittspunkte M, P, Q u. s. w. der Peripherie durch gerade Linien MP, PQ, QS u. s. w., so sind MP, PQ, QS u. s. w. die Seiten des einbeschriebenen ähnlichen Vielecks.

Oder: Man suche die Berührungspunkte und verbinde diese durch gerade Linien.

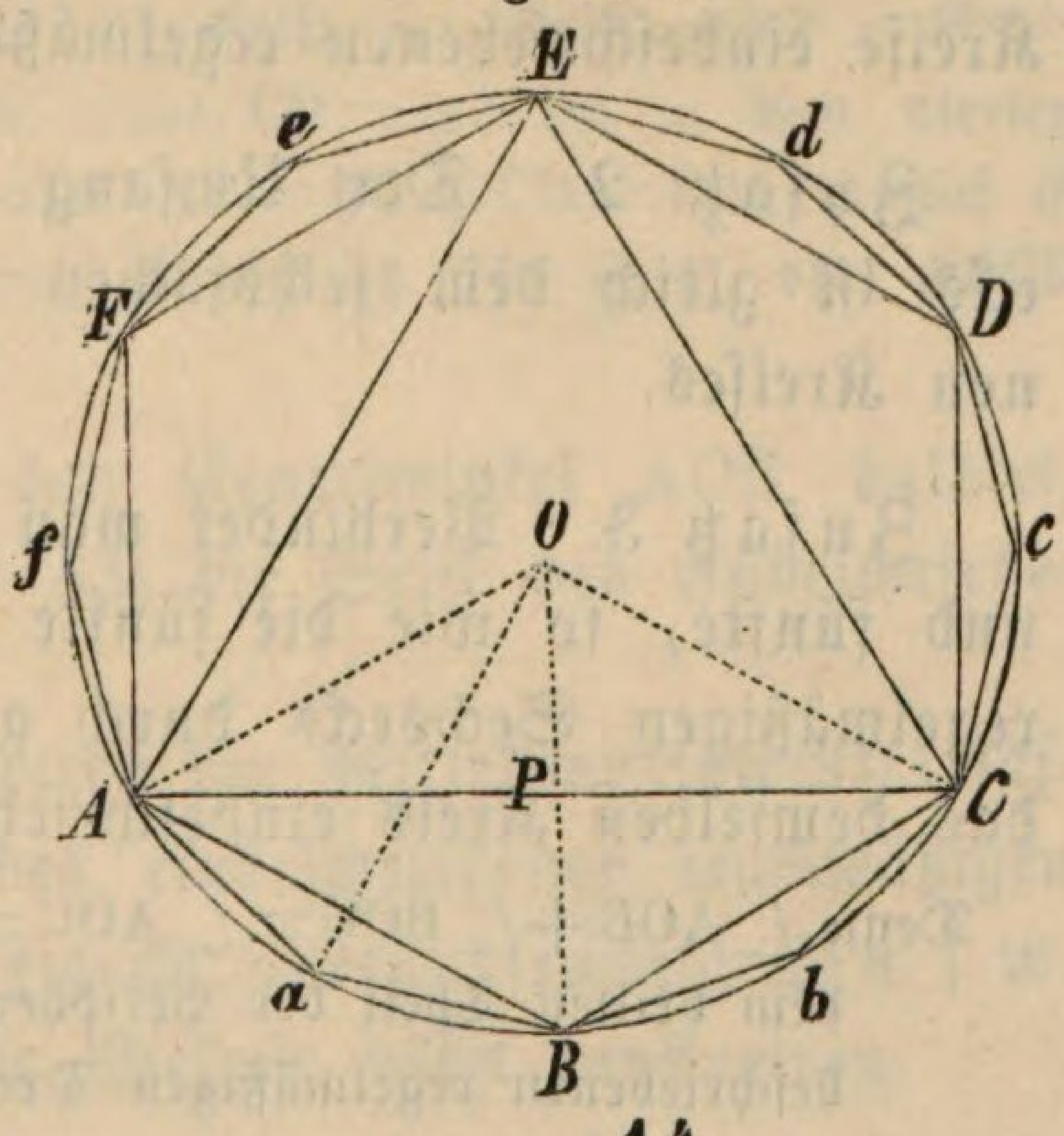
Oder: Man halbire die Centriwinkel MOP′,P′OQ′ u. s. w.

Beweis. Leicht aus dem obigen zu führen.

§. 165.

Aufgabe. Ein regelmäßiges Vieleck ist gegeben; man soll ein anderes verzeichnen, das doppelt so viele Seiten hat. (Fig. 183.)

Fig. 183.



Auflösung. Man beschreibe um das gegebene regelmäßige Vieleck ABCDEF

einen Kreis, halbire die Seiten AB, BC, CD u. s. w., ziehe durch die Halbirungspunkte die Halbmesser Oa, Ob, Oc u. s. w. und verbinde die Punkte A,a; a,B; B,b; b,C u. s. w. durch gerade Linien, so ist das dadurch entstandene Vieleck AaBbCcDdEeFf das verlangte.

Beweis. Es hat doppelt so viele Seiten, auch ist es eine regelmäßige Figur, wie leicht nachgewiesen werden kann.

Zusatz. Umgekehrt läßt sich auch aus einem gegebenen regelmäßigen Vieleck von einer gleichen Seitenanzahl ein anderes verzeichnen, das nur die Hälfte der Anzahl der Seiten hat.

§. 166.

Aufgabe. Ein regelmäßiges Sechseck einem gegebenen Kreis einzuschreiben. (Fig. 183.)

Auflösung und Beweis. Man trage den Halbmesser AO als Sehne AB ein und ziehe OB, so ist $\triangle$AOB gleichseitig; folglich der Centriwinkel AOB $= 60^0$ (§. 44 Z. 6.) $= {}^{360}/_{6}{}^{0}$; mithin arc. AB der sechste Theil der Peripherie, also AB die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks (§. 163 Z. 3.)

Zusatz 1. Der Halbmesser eines Kreises läßt sich daher genau in der Peripherie sechsmal herumtragen, oder der Halbmesser eines Kreises ist die Seite des in diesem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks.

Zusatz 2. Der Umfang eines regelmäßigen Sechsecks ist gleich dem sechsfachen Halbmesser des umschriebenen Kreises.

Zusatz 3. Verbindet man die erste und dritte, dritte und fünfte, so wie die fünfte und erste Winkelspitze eines regelmäßigen Sechsecks durch gerade Linien, so erhält man das demselben Kreis einbeschriebene regelmäßige Dreieck.

Denn $\angle$ AOB $+ \angle$ BOC $= \angle$ AOC $= 120^0 = {}^{360}/_{3}{}^{0}$; daher arc. AC $=$ dem dritten Theil der Peripherie, mithin AC die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Dreiecks.

Zusatz 4. Halbirt man den Centriwinkel AOB, durch Oa und zieht Aa, so ist Aa die Seite, des demselben Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Zwölfecks.

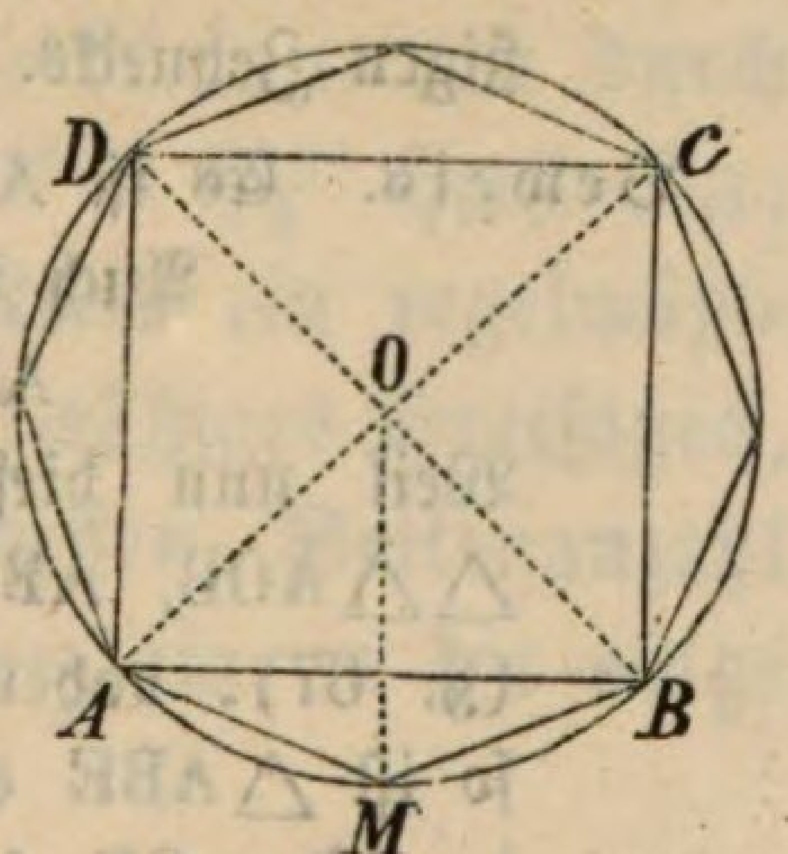
Denn $\angle AOa = \frac{1}{2}\angle AOB = 30^0 = {}^{360}/_{12}{}^0$; daher arc. Aa = dem zwölften Theil der Peripherie; also Aa die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Zwölfecks.

Zusatz 5. Durch fortgesetztes Halbiren der Mittelpunktswinkel läßt sich aus dem regelmäßigen Zwölfeck das regelmäßige Vierundzwanzigeck, aus diesem das regelmäßige Achtundvierzigeck u. s. w. construiren.

Ueberhaupt sind wir jetzt im Stande jedes regelmäßige Vieleck, dessen Seitenanzahl durch $3 . 2^n$, wo n jede ganze Zahl und auch Null vorstellt, ausgedrückt ist, zu construiren.

§. 167.

Fig. 184.



Aufgabe. Ein Quadrat einem gegebenen Kreis einzuschreiben. (Fig. 184.)

Auflösung. Man ziehe zwei Durchmesser AC, DB senkrecht aufeinander und verbinde ihre Endpunkte durch gerade Linien, so ist das dadurch entstandene Viereck ABCD das verlangte Quadrat.

Beweis. $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOA = 90^0 = {}^{360}/_4{}^0$; folglich arc. AB = arc. BC = arc. CD = arc. DA = dem vierten Theil der Peripherie; daher AB = BC = CD = DA; endlich ist auch $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = R$ (§. 149 Z. 4), oder ABCD ein Quadrat.

Zusatz. Wenn OM den Centriwinkel AOB halbirt, und man zieht AM, so ist AM die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Achtecks.

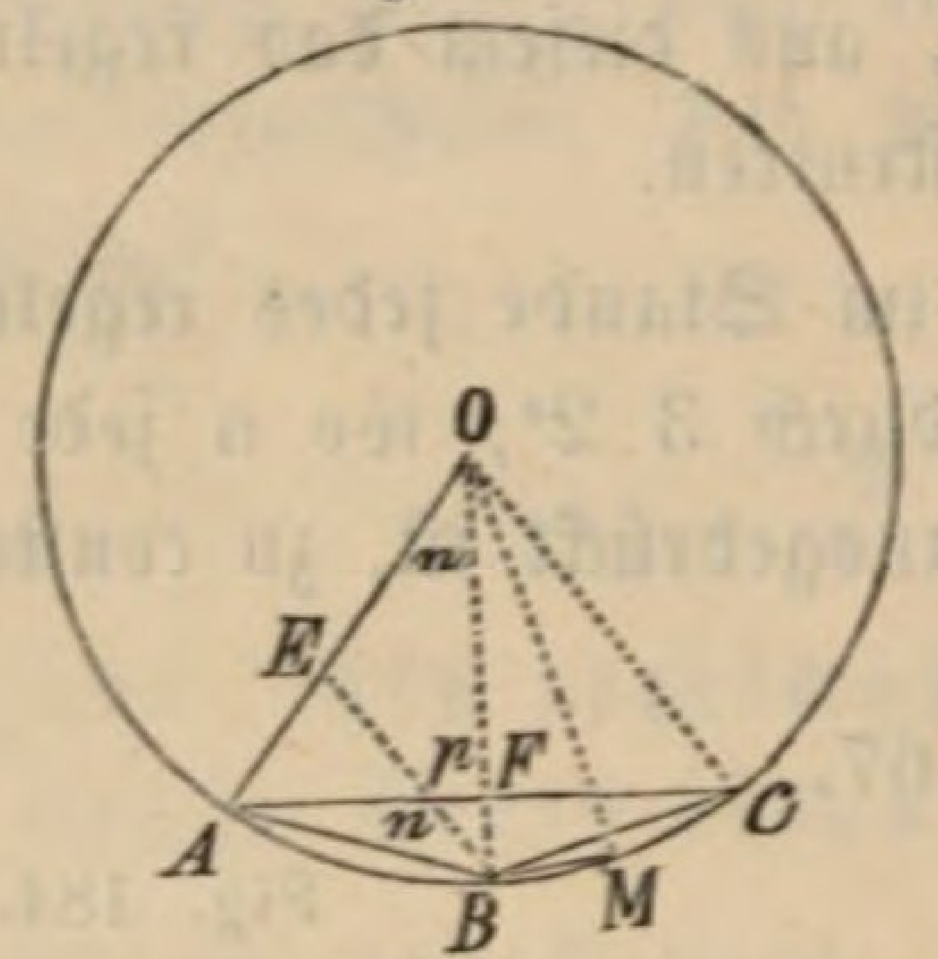
Durch fortgesetztes Halbiren der Mittelpunktswinkel lassen sich nun die Seiten des einbeschriebenen regelmäßigen Sechszehnecks, Zweiunddreißigecks, Vierundsechszigecks u. s. w. finden und daher auch diese Vielecke selbst construiren.

Ueberhaupt können nun alle regelmäßigen Vielecke, deren Seitenanzahl durch 4.2^n ausgedrückt wird, wo n jede ganze Zahl und auch Null vorstellt, einem gegebenen Kreis einbeschrieben werden.

§. 168.

Aufgabe. Ein regelmäßiges Zehneck einem gegebenen Kreis einzuschreiben. (Fig. 185.)

Fig. 185.



Auflösung. Man theile den Halbmesser AO des gegebenen Kreises im Punkt E nach dem äußern und mittlern Verhältniß (§. 158. Z. 2) und trage das größere Stück OE als Sehne AB ein, so ist AB die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Zehnecks.

Beweis. Es ist AE:OE = OE:AO (V. D. C.)

Auch ist OE = AB; folglich ist

AE:AB = AB:AO.

Weil nun diese Proportion Statt findet und $\angle$ A in den $\triangle\triangle$ AOB, ABE gemeinschaftlich ist, so ist $\triangle AOB \sim \triangle ABE$ (§. 67); daher $\angle n = \angle n$ und weil $\triangle$ AOB gleichschenkelig, so ist $\triangle$ ABE ebenfalls gleichschenkelig, nämlich AB = BE und da AB = OE, so ist jetzt auch BE = OE, daher n = p.

Fassen wir nun die drei Winkel des Dreiecks AOB zusammen und bemerken,

daß $\angle OBA = \angle OAB = p + n = 2n$, so erhalten wir

$$\angle AOB + \angle OBA + \angle OAB = 2R, \text{ oder}$$

$$n + 2n + 2n = 2R, \text{ d. h.}$$

$$5n = 2R, \text{ mithin}$$

$$n = {}^2/_5 R = 36^0 = {}^{360}/_{10}{}^0.$$

Also ist arc. AB der zehnte Theil der Peripherie, oder die Sehne AB läßt sich genau zehnmal in der Peripherie des Kreises herumtragen, und ist folglich die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Zehnecks.

Zusatz 1. Wenn AB = BC und man zieht AC, so ist AC die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Fünfecks.

Denn $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 2.36^0 = 72^0 = {}^{360}/_5{}^0$, d. h. arc. AC der fünfte Theil der Peripherie und AC ist die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Fünfecks.

Zusatz 2. Theilt man durch OM den Centriwinkel BOC in zwei gleiche Theile, und zieht BM, so ist BM die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Zwanzigecks.

Denn $\angle BOM = {}^1/_2 . 36^0 = 18^0 = {}^{360}/_{20}{}^0$, d. h. arc. BM der zwanzigste Theil der Peripherie und BM ist die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Zwanzigecks.

Durch fortgesetztes Halbiren läßt sich nun weiter die Seite eines einbeschriebenen regelmäßigen Vierzig-, Achtzig-, Hundertundsechszigecks u. s. w. finden. Ueberhaupt können wir jetzt jedes regelmäßige Vieleck, dessen Seitenanzahl durch 5.2^n ausgedrückt ist, wobei n jede ganze positive Zahl und auch Null bedeutet, einem gegebenen Kreise einschreiben.

Zusatz 3. Weil wir nun Centriwinkel von 60^0 (§. 166) und 36^0 construiren können, so können wir durch Subtraktion einen Centriwinkel von $24^0 = \frac{360}{15}{}^0$ herstellen; mithin sind wir auch im Stande dem Kreis ein regelmäßiges Fünfzehneck und aus diesem ein regelmäßiges Dreißigeck, überhaupt ein regelmäßiges Vieleck, dessen Seitenanzahl durch 15.2^n ausgedrückt ist, einzuschreiben, wo n die obige Bedeutung hat.

Zusatz 4. Betrachtet man das Dreieck AOB noch etwas näher, so findet man, daß es ein gleichschenkeliges Dreieck ist von der besondern Beschaffenheit, daß der Winkel an der Spitze die Hälfte von jedem Winkel an der Grundlinie ist.

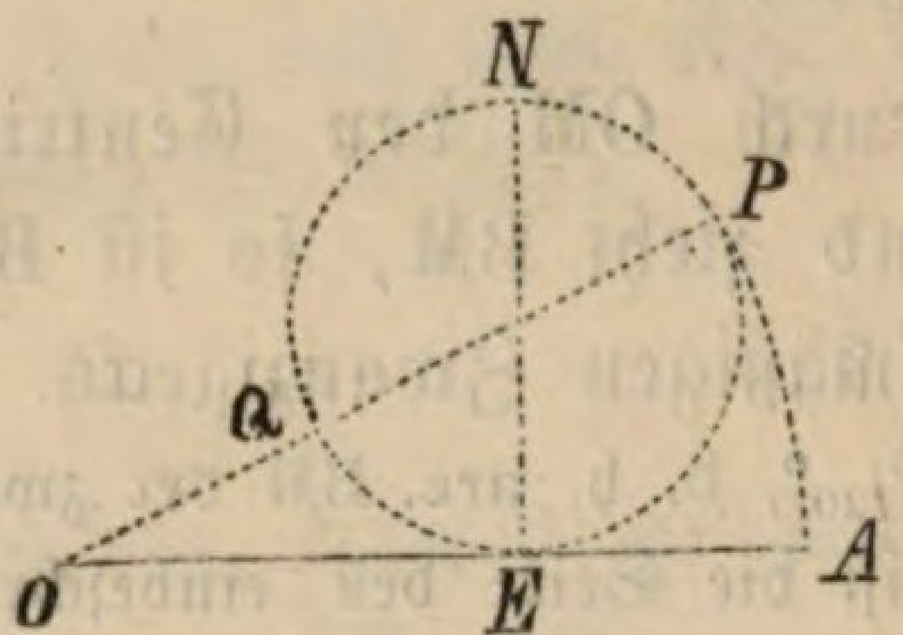
Um aber ein gleichschenkeliches Dreieck, dessen Winkel an der Spitze die Hälfte eines Winkels an der Grundlinie ist, zu construiren, verfahre man also:

a) Wenn der Schenkel gegeben.

Man theile den gegebenen Schenkel nach dem äußern und mittlern Verhältniß, und nehme das größere Stück als Grundlinie zu dem verlangten Dreieck.

b) Wenn die Grundlinie gegeben ist.

Fig. 186.



Am Endpunkte (Fig. 186) der gegebenen Grundlinie OE, errichte man die Senkrechte EN = OE und beschreibe über EN, als Durchmesser, einen Kreis; ziehe OP durch den Mittelpunkt des Kreises, so ist EN = QP = OE. Macht man noch OA = OP, so ist OA der Schenkel des verlangten Dreiecks.

Denn es ist (§. 158. IV) OQ : OE = OE : OP. Nun ist OQ = OP − QP = OA − OE = AE; daher AE : OE = OE : AO.

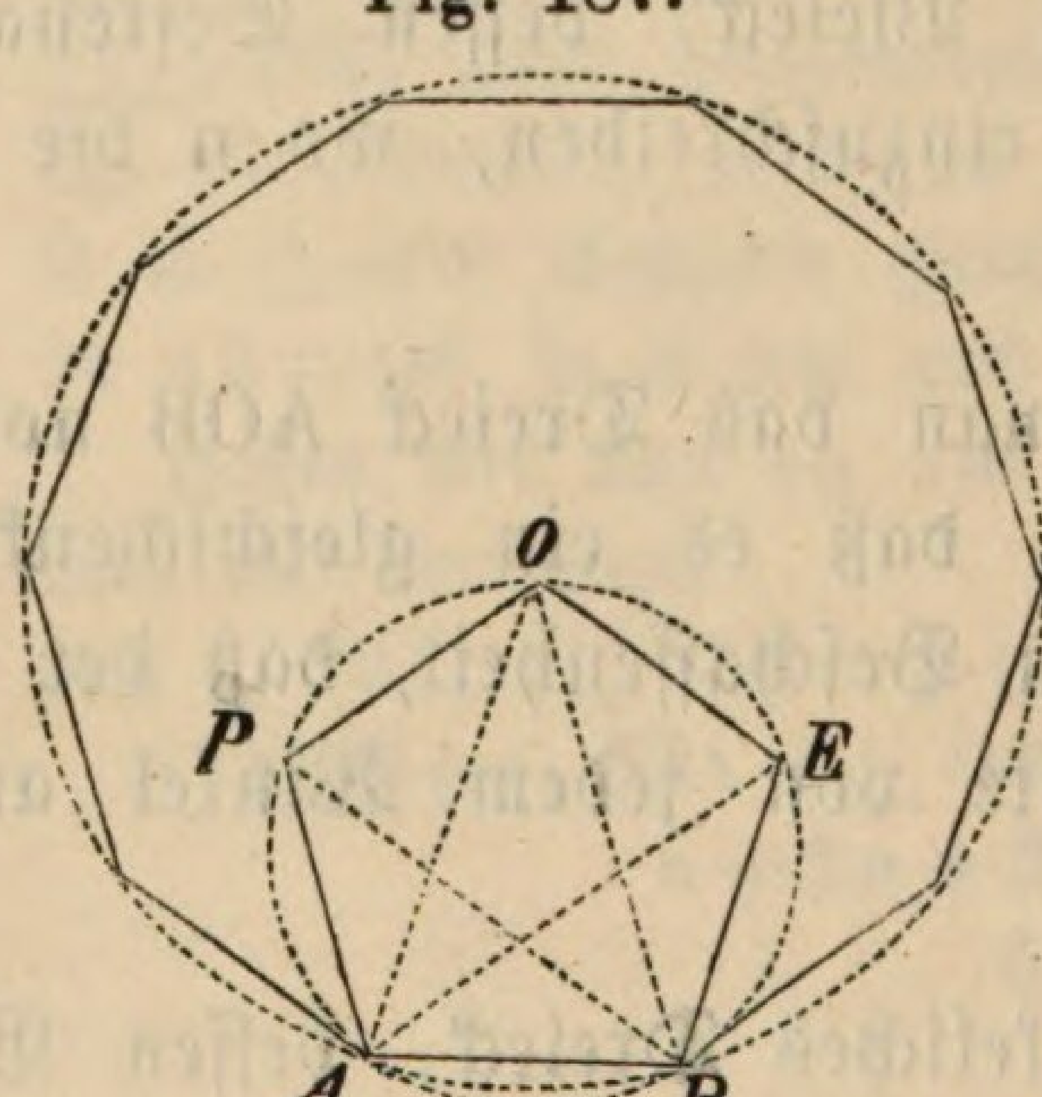
Wie müßte man aber verfahren, wenn die Differenz zwischen dem Schenkel und der Grundlinie gegeben wäre?

§. 169.

Aufgabe. Ueber einer gegebenen Geraden AB
I. ein regelmäßiges Zehneck,
II. ein regelmäßiges Fünfeck
zu construiren.

Auflösung. Man construire über AB (Fig. 187) ein gleichschenkliges Dreieck AOB von der Beschaffenheit, daß ∠ AOB = $^1/_2$ OAB ist (§. 168. Z. 4) und ziehe um O mit einem Halbmesser = AO einen Kreis, so ist AB für diesen Kreis die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks (§. 168), welches sich nun leicht verzeichnen läßt.

Fig. 187.



Um aber das regelmäßige Fünfeck über AB zu erhalten, beschreibe man durch die drei Punkte A, B, O einen Kreis, halbire durch BP den Winkel B, und durch AE den Winkel A, und ziehe AP, PO, OE, EB, so ist APOEB das verlangte regelmäßige Fünfeck.

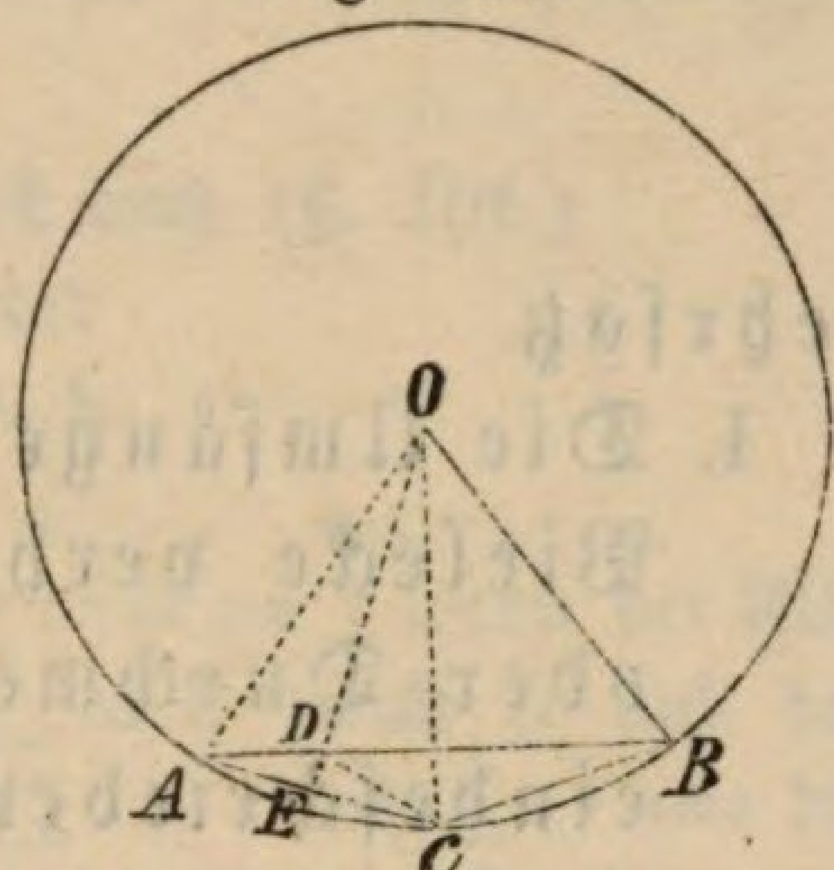
Beweis. V. D. V. ist ∠ AOB = $^1/_2$ ∠ OAB = $^1/_2$ ∠ OBA, oder arc. AB = $^1/_2$ arc. AO = $^1/_2$ arc. BO. Nun ist (V. D. C.) arc. AB = arc. PO = $^1/_2$ arc. AO und arc. OE = arc. EB = $^1/_2$ arc. BO; daher

arc. AB = arc. AP = arc. PO = arc. OE = arc. EB; also AB = AP = PO = OE = EB, d. h. APOEB ein regelmäßiges Fünfeck.

§. 170.

Lehrsatz. Das Quadrat der Seite des regelmäßigen Fünfecks ist gleich der Summe der Quadrate der Seite des regelmäßigen Zehnecks und des Halbmessers des Kreises, der um beide Figuren beschrieben ist. (Fig. 188.)

Fig. 188.



Beweis. Es sey AB die Seite des im Kreise, dessen Halbmesser = BO, einbeschriebenen regelmäßigen Fünfecks und AC = BC die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Zehnecks; man fälle OE senkrecht auf AC und ziehe DC; so ist AD = DC (§. 57. II), daher ∠ DCA = ∠ DAC, und weil AC = BC, so ist auch ∠ BAC = ∠ ABC, also ∠ DAC = ∠ DCA = ∠ ABC,

mithin △ ADC ∾ △ ACB

daraus ergibt sich AD : AC = AC : AB, folglich

$$\text{I)}\ AD = \frac{AC^2}{AB.}$$

Ferner ist ∠ AOC = ∠ BOC = $^2/_5$ R (§. 168); also, weil ∠ AOC durch OE halbirt ist, ∠ DOB = $^3/_5$ R. Weil ∠ AOB = $^4/_5$ R, so ist ∠ OAB = $^3/_5$ R (§. 44. Z. 4); Da nun ∠ DOB = ∠ OAB, und ∠ OBD = ∠ OBA, so folgt, daß △ ODB ∾ △ AOB ist (§. 66. Z. 1); daher

DB : BO = BO : AB und

$$\text{daraus II)}\ DB = \frac{BO^2}{AB.}$$

Wenn man die Gleichungen I und II addirt, ergibt sich

$$AD + DB = \frac{AC^2}{AB} + \frac{BO^2}{AB}, \text{ oder}$$

$$AB = \frac{AC^2}{AB} + \frac{BO^2}{AB}, \text{ mithin}$$

$$AB^2 = AC^2 + BO^2. \text{ (W. Z. E.)}$$

Zusatz. Wenn man daher ein rechtwinkeliges Dreieck von der Beschaffenheit construirt, daß die eine Kathete den

Halbmesser eines Kreises, die andere aber die Seite des in diesem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Zehnecks vorstellt, so stellt die Hypotenuse die Seite des im nemlichen Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Fünfecks vor.

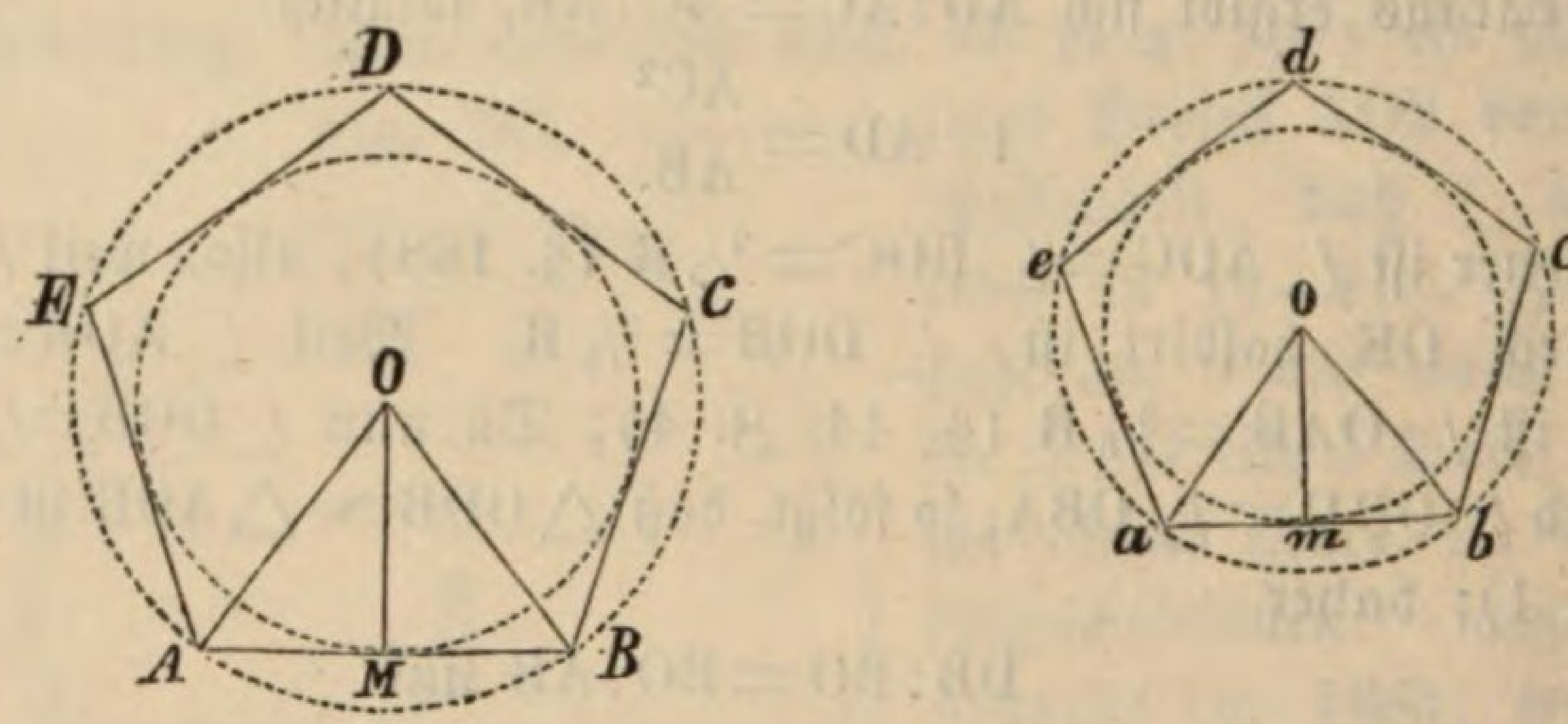
§. 171.

Lehrsatz.

I. **Die Umfänge zweier ähnlicher regelmäßiger Vielecke verhalten sich wie die Halbmesser oder Durchmesser der umbeschriebenen oder einbeschriebenen Kreise.**

II. **Die Flächenräume zweier ähnlicher regelmäßiger Vielecke verhalten sich wie die Quadrate der Halbmesser oder Durchmesser der umschriebenen oder einbeschriebenen Kreise.** (Fig. 189.)

Fig. 189.



Beweis I. Es seyen ABCDE und abcde zwei ähnliche regelmäßige Vielecke. Zieht man AO, OB, ao, ob, so ist $\triangle AOB \backsim \triangle aob$ und deshalb

$$AB:ab = AO:ao;$$

haben nun beide Vielecke n Seiten, so sind n.AB und n.ab ihre Umfänge, welche wir P, p nennen wollen, und wir erhalten

$$n.AB:n.ab = AO:ao, \text{ oder}$$
$$P:p = AO:ao = R:r$$
$$= 2.AO:2.ao = D:d, \text{ wenn man}$$

mit R, r, D, d die Halbmesser und Durchmesser der beiden umschriebenen Kreise bezeichnet. Weil aber auch

$AO : ao = OM : om$ Statt findet, so ist auch

$P : p = OM : om = R' : r'$

$= 2 . OM : 2 . om = D' : d'$; wenn R', r', D', d' die Halbmesser und Durchmesser der einbeschriebenen Kreise vorstellen.

Beweis. II. Weil $\triangle AOB \sim \triangle aob$, so ist auch (§. 104.)

$\triangle AOB : \triangle aob = AO^2 : ao^2$, oder

$n . AOB : n . \triangle aob = AO^2 : ao^2$, d. h.

$Q : q = R^2 : r^2$

$= (2 R)^2 : (2 r)^2 = D^2 : d^2$; wenn der Flächenraum des Vielecks $ABCDE = n . \triangle AOB$ durch Q und der Flächenraum des Vielecks $abcde = n . \triangle aob$ durch q, so wie die Halbmesser und Durchmesser der einbeschriebenen Kreise durch R, r, D, d vorgestellt werden.

Nun ist aber auch $AO : ao = OM : om$, oder

$AO^2 : ao^2 = OM^2 : om^2$ deshalb auch

$Q : q = OM^2 : om^2 = R'^2 : r'^2$

$= D'^2 : d'^2$; wenn wir die obige Bezeichnung gelten lassen.

§. 172.

Wir wollen nun noch, ehe wir diesen Abschnitt beschließen, eine Reihe von Aufgaben, die Eigenschaften des Kreises und der mit demselben in Verbindung stehenden Linien, Winkeln und Figuren betreffend, folgen lassen, zuvor aber noch folgende Sätze über geometrische Oerter zusammenstellen, deren Richtigkeit in diesem Abschnitte schon erwiesen ist und welche bei der Auflösung der nachfolgenden Aufgaben mannichfach ihre Anwendung finden.

Diese Sätze sind:

I. Die Peripherie des Kreises ist der geometrische Ort für die Spitzen aller der gleichen Winkel, die auf einem und demselben Bogen stehen, oder deren jeder gleich dem Winkel ist, den die Sehne mit der Tangente im Berührungspunkte bildet.

II. Die Senkrechte auf der Sehne errichtet in ihrer Mitte oder die Senkrechte auf der Tangente errichtet im Berührungspunkt ist der geometrische Ort für den Mittelpunkt des Kreises.

III. Die Gerade, welche einen Winkel halbirt ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller der Kreise, welche die beiden Schenkel des Winkels berühren.

IV. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die einen gleichen Halbmesser haben und eine gegebene Gerade berühren, sind die beiden Parallelen, die auf beiden Seiten der gegebenen Geraden in einem Abstand, der gleich dem Halbmesser dieser gleichen Kreise ist, gezogen sind.

V. Der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise mit einem gegebenen Halbmesser, die durch einen gegebenen Punkt gehen, ist selbst ein Kreis, dessen Mittelpunkt der gegebene Punkt, und dessen Halbmesser der Halbmesser obiger Kreise ist.

§. 173.

Aufgabe. Zur gegebenen Peripherie eines Kreises oder zu einem gegebenen Kreisbogen den Mittelpunkt zu finden.

Auflösung. Beruht auf §. 152. Z. 2.

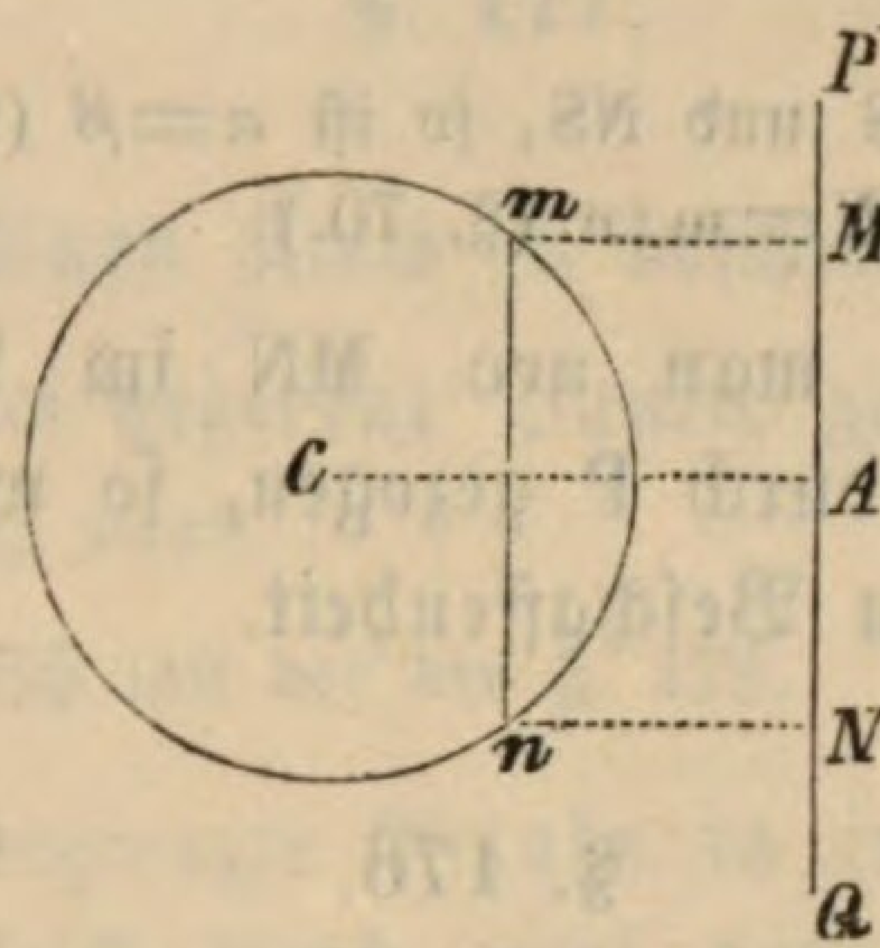
§. 174.

Aufgabe. In einem gegebenen Kreis eine Sehne MN von gegebener Größe einzutragen, die

a) mit einer gegebenen Geraden PQ parallel läuft, oder

b) deren Verlängerung, durch einen außerhalb des Kreises gelegenen Punkt P geht.

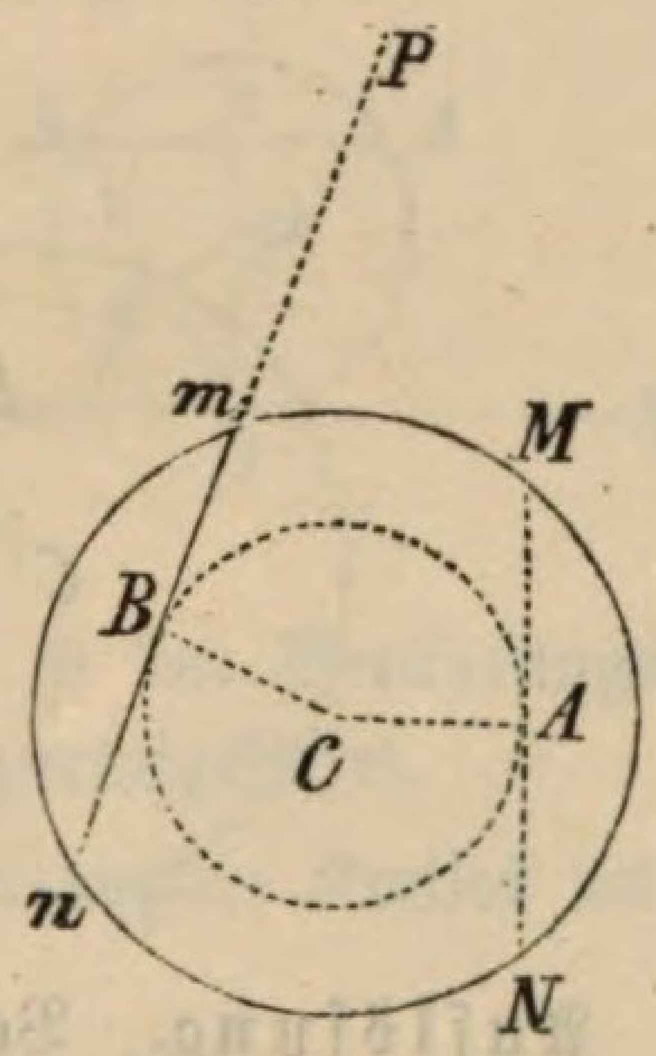
Fig. 190.



Auflösung. a) Man fälle (Fig. 190) vom Mittelpunkt C des Kreises auf die gegebene Gerade PQ eine Senkrechte CA, mache AM = AN, so daß MN die gegebene Gerade ist, ziehe Mm || Nn || CA, so ist mn die verlangte Sehne.

Beweis. Leicht.

Fig. 191.



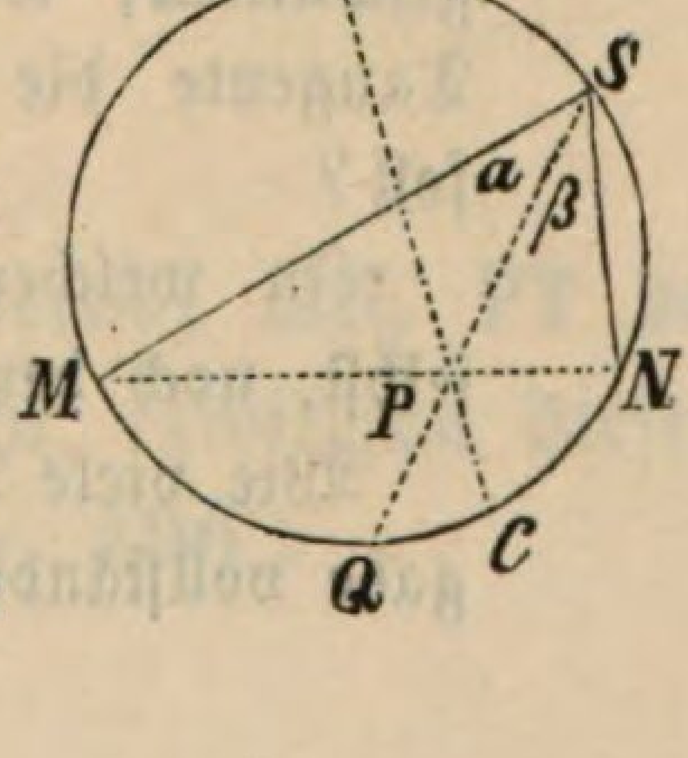
Auflösung. b) Man trage (Fig. 191) die gegebene Gerade MN als Sehne ein, halbire diese in A, beschreibe mit dem Halbmesser AC um C einen Kreis und ziehe endlich vom gegebenen Punkt P an diesen Kreis eine Tangente (§. 155. II); so ist das Stück mn derselben, das vom gegebenen Kreis abgeschnitten wird, die verlangte Sehne.

Beweis. CA = CB; folglich MN = mn (§. 151. I.)

§. 175.

Aufgabe. Man soll in der Peripherie eines Kreises einen Punkt von der Beschaffenheit bestimmen, daß die Entfernungen desselben von zwei andern in derselben Peripherie gegebenen Punkten M, N ein gegebenes Verhältniß z. B. = m : n zu einander haben.

Fig. 192.



Auflösung. Man verbinde (Fig. 192) die beiden gegebenen Punkte M, N durch eine Gerade, und theile diese Gerade im Punkte P nach dem verlangten Verhältniß (§. 63 Z. 2); nämlich es sey MP : PN = m : n; halbire

arc. MN in Q, und ziehe die Sehne QS durch P, so ist S der verlangte Punkt.

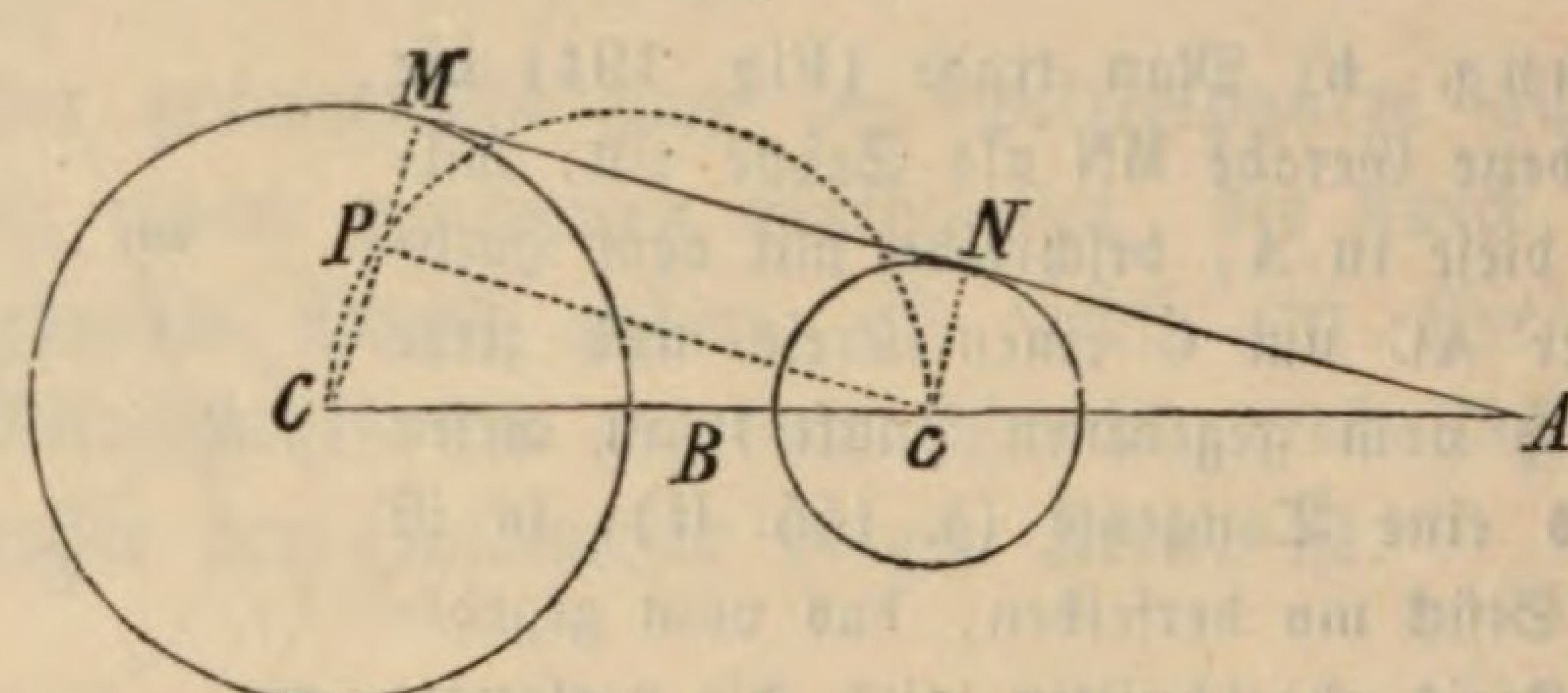
Beweis. Ziehe MS und NS, so ist $\alpha = \beta$ (§. 149. Z. 2); daher MS : NS = MP : PN = m : n (§. 70.)

Zusatz. Hätte man arc. MN im Punkte F halbirt und die Sehne FC durch P gezogen, so wäre C ein zweiter Punkt von derselben Beschaffenheit.

§. 176.

Aufgabe. Zwei Kreise sind hinsichtlich ihrer Lage und Größe nach gegeben; man soll eine Tangente ziehen, die beide Kreise zugleich berührt.

Fig. 193.



Auflösung. Von beiden Kreisen sind also die Centrallinie Cc, und die beiden Halbmesser CM und CN bekannt.

Man beschreibe (Fig. 193) über der Centrallinie Cc einen Halbkreis, lege in diesen vom Mittelpunkt C des größern Kreises die Sehne CP = der Differenz der beiden Halbmesser der gegebenen Kreise und verlängere CP bis M. Zieht man Pc und MN || Pc, so sind M und N die Berührungspunkte der gesuchten Tangente MN.

Man führe den Beweis!

Wird MN verlängert, so wird die Verlängerung von Cc geschnitten; wie wäre aber die Aufgabe zu lösen, wenn die Tangente die Centrale zwischen ihren Endpunkten schneiden soll?

In welchem Falle wird die Tangente weder die Centrale selbst, noch deren Verlängerung durchschneiden?

Wie viele Tangenten sind überhaupt möglich, wenn der Aufgabe vollständig genügt ist?

§. 177.

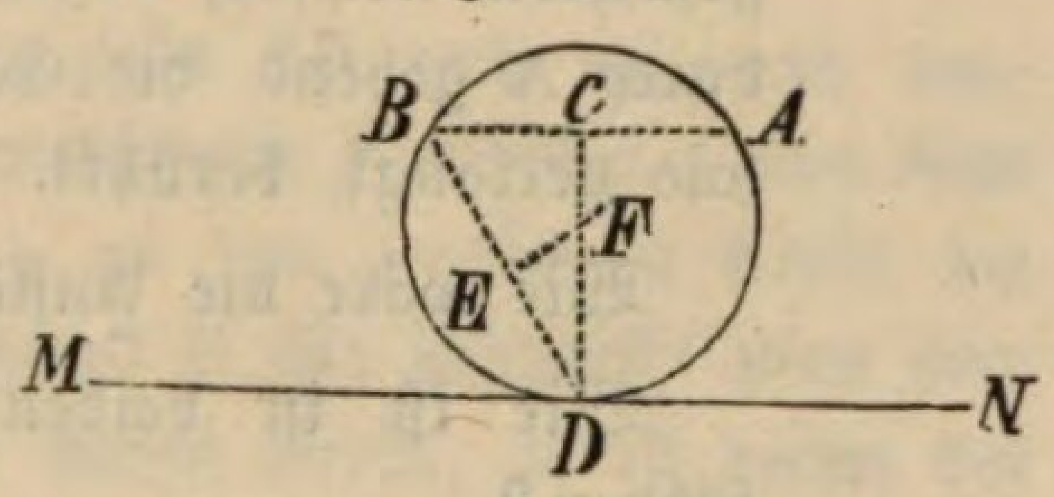
Aufgabe. Einen Kreis zu beschreiben, der

1) durch drei gegebene Punkte geht, die nicht in gerader Linie liegen, oder

Auflösung. Identisch mit der des §. 173.

2) eine unbegrenzte Gerade in irgend einem Punkte berührt und zugleich durch zwei außer derselben liegende Punkte A, B, welche auf einer Seite von MN liegen, geht.

Fig. 194.



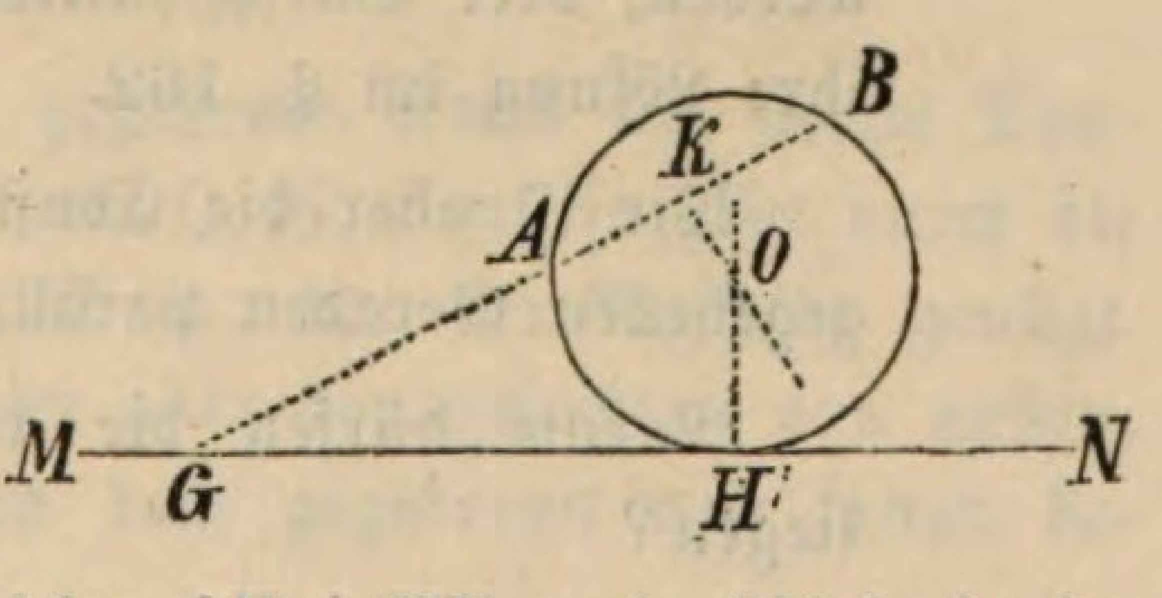
Auflösung. Hier können zwei Fälle Statt finden:

a) die Verbindungslinie AB der beiden gegebenen Punkte läuft parallel mit der Gegebenen MN (Fig. 194).

Halbire AB in C, fälle CD ⊥ MN, so ist D der Berührungspunkt, und die Aufgabe ist auf die vorige zurückgeführt.

Man suche nun den Mittelpunkt des verlangten Kreises und führe den Beweis.

Fig. 195.



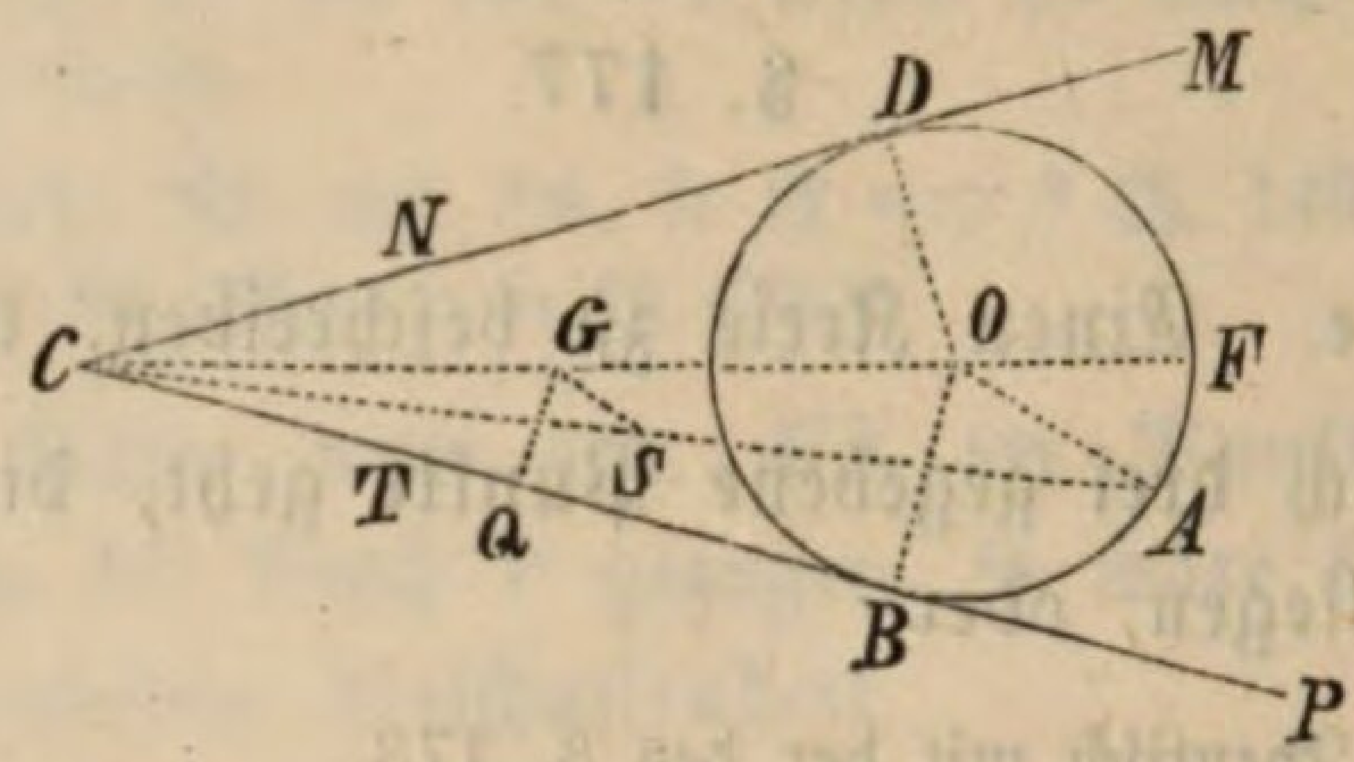
b) Die verlängerte AB schneidet die gegebene MN in G. (Fig. 195.)

Man suche zu GA und AB die mittlere geometrische Proportionale (§. 72) und trage diese von G nach H, errichte OH ⊥ MN und OK ⊥ in der Mitte von AB, so ist der Durchschnittspunkt O dieser Senkrechten der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, der durch A, B geht und MN in H berührt.

Warum?

3) zwei der Lage nach gegebene Gerade MN, PT berührt und zugleich durch einen gegebenen, zwischen diesen Geraden gelegenen Punkt A geht. (Fig. 196.)

Fig. 196.



Auflösung. Man verlängere die beiden gegebenen Geraden MN, PT bis ein Durchschnitt C erfolgt, halbire $\angle$ MCP durch CF, ziehe CA; von einem beliebigen Punkt G in CF fälle man GQ $\perp$ CP und durchschneide die Gerade CA von G aus mit einem Halbmesser GQ in S; zieht man SG und AO || SG, so ist der Punkt O, in welchem CF geschnitten wird, der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, dessen Halbmesser = OA und dessen Peripherie durch A gehend die Geraden MN, PT in den Punkten D, B, wie verlangt, berührt.

Wie wäre die Auflösung abzuändern, wenn MN || PQ wäre?

Wie ist in beiden Fällen der Auflösung der Beweis zu führen?

4) drei der Lage nach gegebene Gerade berührt, von welchen aber nur zwei parallel laufen dürfen.

Auflösung. Ist keine von den gegebenen Geraden zu einer andern parallel, so entstehen, wenn sie alle drei gehörig verlängert werden, drei Durchschnittspunkte, und daher findet diese Aufgabe ihre Lösung im §. 162.

Wie ist aber die Construction zu vollführen, wenn zwei der gegebenen Geraden parallel liegen?

Warum dürfen die drei gegebenen Geraden nicht parallel liegen?

5) eine der Lage nach gegebene Gerade MN in einem bestimmten Punkte A berührt und durch einen außerhalb dieser Geraden liegenden Punkt B geht.

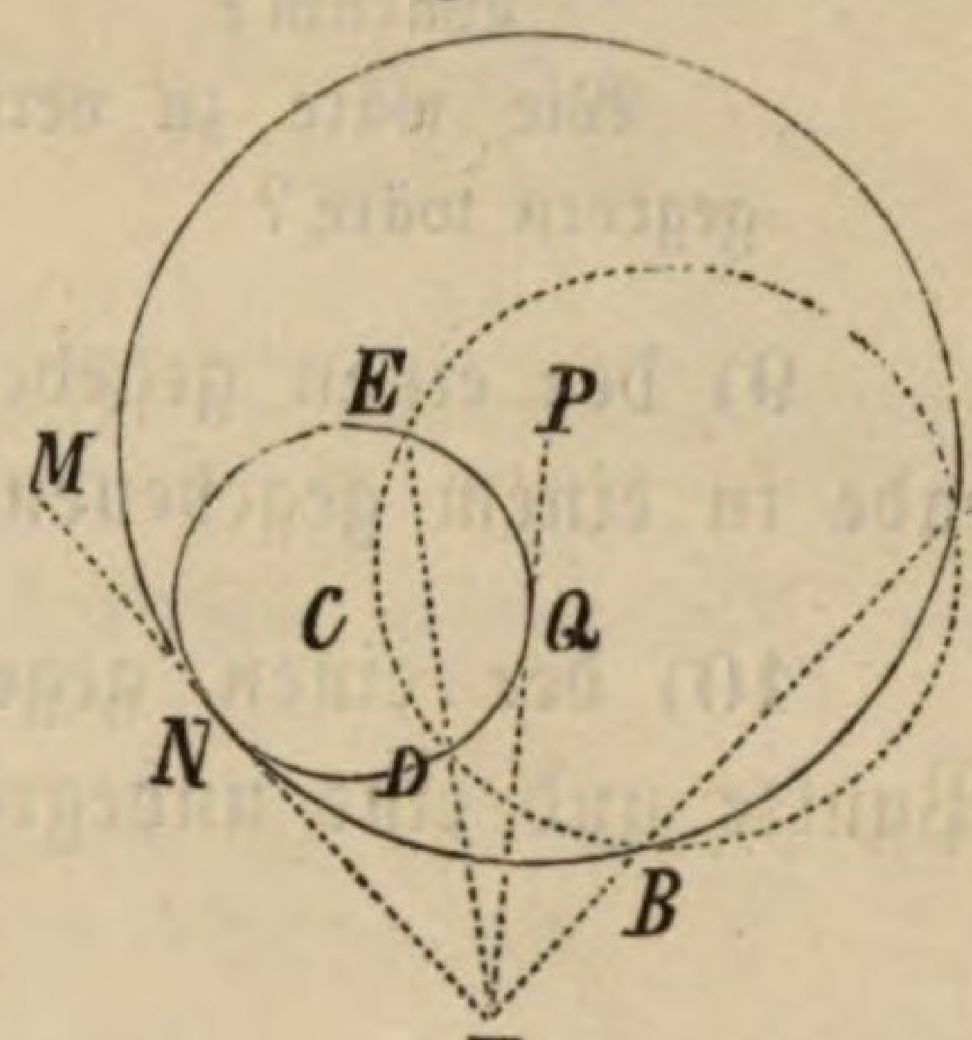
Auflösung. Der Mittelpunkt des gesuchten Kreises wird der Durchschnittspunkt der beiden Senkrechten seyn, welche in A auf MN und in der Mitte von AB auf diese errichtet sind.

Warum?

6) zwei der Lage nach gegebene Gerade MN, PQ und zwar die erstere in dem bestimmten Punkt A berührt.

Auflösung. Man erinnere sich des §. 172. III.

Fig. 197.



7) der einen gegebenen Kreis, dessen Mittelpunkt C, berührt und durch zwei außerhalb dieses Kreises gelegene Punkte A, B geht. (Fig. 197.)

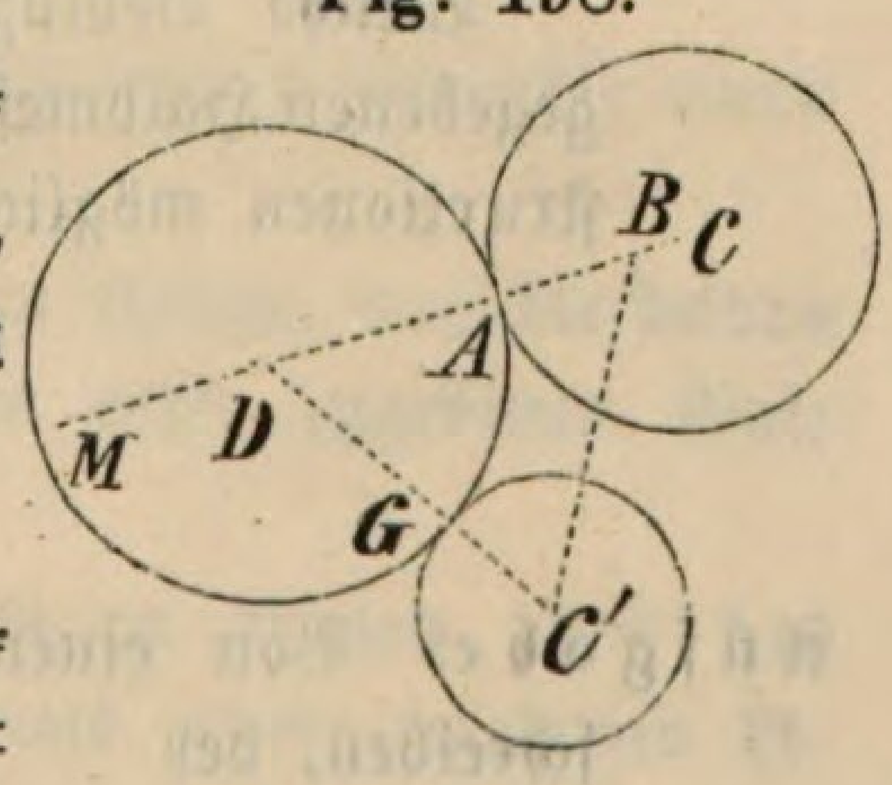
Auflösung. In der Peripherie des gegebenen Kreises nehme man willkührlich einen Punkt D an; lege durch die Punkte A, B und D einen Kreis, welcher den gegebenen in D und E schneidet; ziehe ED und AB und verlängere beide Gerade, bis der Durchschnitt F erfolgt. Von dem Punkte F lege man (§. 155. II.) an den gegebenen Kreis die Tangente FM, deren Berührungspunkt N ist; beschreibt man nun durch die drei Punkte N, A, B einen Kreis, so ist dieser der verlangte.

Warum?

Was würde erfolgen, wenn der Hilfskreis ABD den gegebenen Kreis nur in dem Punkte D berühren, also kein zweiter Durchschnitt E sich ergeben sollte? Wie wäre zu verfahren, wenn ED und AB parallel liefen, also kein Durchschnitt F entstünde?

Wenn man von F an den gegebenen Kreis die zweite Tangente FP, deren Berührungspunkt Q ist, legt, so geht durch die Punkte Q, A, B ebenfalls ein Kreis, der der Aufgabe genügt. Der gegebene Kreis berührt hier aber den gesuchten von außen, während der erstgefundene von dem gegebenen von innen berührt wird.

Fig. 198.



8) der zwei gegebene Kreise, deren Mittelpunkte C, C′ sind, berührt, und zwar den einen Kreis in dem gegebenen Punkte A. (Fig. 198.)

Auflösung. Man ziehe durch A die unbegrenzte Gerade CM, mache AB =

C'G = dem Halbmesser des Kreises um C', verbinde B und C' durch eine Gerade und construire $\angle BC'D = \angle C'BD$; so ist der Durchschnittspunkt D der Mittelpunkt des gesuchten Kreises, dessen Halbmesser $= AD = GD$.

Warum?

Wie wäre zu verfahren, wenn $AC = GC'$ oder $AC < GC'$ gegeben wäre?

9) der einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt.

10) der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte und eine unbegrenzte Gerade berührt.

§. 178.

Aufgabe. Mit einem gegebenen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben, der

1) durch zwei gegebene Punkte geht;
2) durch einen gegebenen Punkt geht und eine unbegrenzte Gerade berührt;
3) zwei gegebene nicht parallele Gerade berührt;
4) eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt;
5) durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis berührt; der gegebene Punkt kann innerhalb oder außerhalb der gegebenen Kreisfläche liegen;
6) der zwei gegebene Kreise berührt, und zwar entweder beide von Außen, oder berührend einschließt, oder den einen von Außen berührt, den andern berührend einschließt;
7) einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt;
8) einen gegebenen Kreis und eine unbegrenzte Gerade berührt.

Welche Bedingungen müssen noch bezüglich der Größe des gegebenen Halbmessers Statt finden, wenn die verlangten 8 Constructionen möglich werden sollen?

§. 179.

Aufgabe. Von einem gegebenen Punkte aus einen Kreis zu beschreiben, der

1) durch einen gegebenen Punkt geht, oder
2) der eine gegebene Gerade berührt, oder
3) der einen gegebenen Kreis berührt.

§. 180.

Aufgaben.

1) Ueber einer gegebenen Geraden ein Kreissegment zu beschreiben, das einen gegebenen Winkel enthält.
2) Von einem gegebenen Kreis ein Segment abzuschneiden, das einen gegebenen Winkel enthält.
3) Einen Punkt zu bestimmen, von welchem aus man drei der Lage nach gegebene Punkte unter gegebenen Winkeln sieht.
4) In einem Kreis ein Dreieck zu beschreiben, das zwei gegebene Winkel hat, also einem gegebenen ähnlich ist.
5) Ein Dreieck zu construiren, wenn die Seite, der ihr gegenüberliegende Winkel und die Höhe auf diese Seite gegeben ist.

Die Auflösungen dieser Aufgaben gründen sich hauptsächlich auf §. 158 III.

§. 181.

Aufgaben.

1) Durch einen innerhalb eines Kreises gelegenen Punkt die kleinste Sehne zu tragen.
2) In einem gegebenen Kreis zwei gegebene Gerade als Sehnen einzutragen, welche sich unter einem gegebenen Winkel schneiden.
3) Zwei parallele Sehnen und ihre Entfernung von einander sind gegeben; man soll den Mittelpunkt des dazu gehörigen Kreises finden.
4) An einen gegebenen Kreis eine Tangente zu ziehen, die auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht.
5) An einen gegebenen Kreis zwei Tangenten zu ziehen, die einen bekannten Winkel einschließen.
6) Eine gegebene Linie so in zwei Theile zu theilen, daß die beiden Quadrate dieser Theile dem Quadrate einer gegebenen Linie gleich sind.
7) Eine gegebene Linie so in zwei Theile zu theilen, daß das Rechteck aus diesen Theilen dem Quadrate einer gegebenen Linie gleich ist.

8) In einen gegebenen Quadranten einen Kreis zu beschreiben, der die beiden Halbmesser und den Bogen berührt.

9) Es sollen zwei sich schneidende Kreise mit gegebenen Halbmessern so beschrieben werden, daß die, durch einen ihrer Durchschnittspunkte gelegten, Tangenten einen beliebigen Winkel bilden.

10) Einen Kreis mit gegebenem Halbmesser zu construiren, der von zwei gegebenen Geraden Stücke als Sehnen abschneidet, die eine bestimmte Länge haben.

11) Durch einen der Durchschnittspunkte zweier Kreise eine Gerade so zu ziehen, daß das durch die Peripherie abgeschnittene Stück eine gegebene Länge habe.

12) Ein Dreieck einem gegebenen Kreis einzuschreiben, wenn gegeben ist:
  a) eine Seite und der ihr anliegende Winkel.
  b) die Summe zweier Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel;
  c) die Differenz zweier Seiten und der von diesen eingeschlossene Winkel;
  d) die Summe zweier Seiten und der einer von diesen Seiten gegenüber liegende Winkel;
  e) die Differenz zweier Seiten und der der kleinern (oder der größern) Seite gegenüber liegende Winkel;
  f) die größte Seite und die Differenz der beiden andern;
  g) ein Winkel und die Höhe, die durch dessen Spitze geht.

13) Ein regelmäßiges Sechseck zu construiren, dessen Flächenraum das Vierfache des Flächenraumes eines gegebenen regelmäßigen Sechsecks ist.

14) Es soll ein regelmäßiges Fünfeck verzeichnet werden, dessen Umfang die Hälfte des Umfangs eines gegebenen regelmäßigen Fünfecks ist.

15) Ein regelmäßiges Zehneck zu construiren, dessen Flächenraum gleich der Summe der Flächenräume zweier gegebener regelmäßiger Zehnecke ist.

Sechster Abschnitt.

Geometrisch-algebraische Aufgaben.

§. 182.

Mit großem Vortheile bedient man sich der Algebra zur Lösung geometrischer Aufgaben, indem man die gegebenen und gesuchten Linien, Flächen 2c. als benannte Zahlen sich denkt, die auf eine bestimmte angenommene Einheit sich beziehen, sodann die Bedingungen der Aufgabe d. h. die Verhältnisse und Beziehungen der gegebenen geometrischen Größen zu den gesuchten gehörig beachtet und verbindet, so wie ihre gegenseitige Abhängigkeit von einander, wie solche aus den Sätzen der Geometrie sich ergibt, untersucht, in die algebraische Zeichensprache übersetzt und algebraische Gleichungen bildet. Aus diesen Gleichungen werden endlich nach rein arithmetischen Gesetzen die unbekannten Größen bestimmt und die so gefundenen Resultate wieder durch Construction in die Geometrie zurückzuführen gesucht.

Man bezeichnet hier gerade so wie in der Algebra die unbekannten Größen durch x, y, z u. s. w., die bekannten durch a, b, c, u. s. w.

Sind die Bedingungen der geometrischen Aufgabe von der Beschaffenheit, daß sich aus denselben so viele wesentliche Gleichungen bilden lassen als unbekannte Größen in diesen vorkommen, so ist die Aufgabe bestimmt, im entgegengesetzten Fall aber unbestimmt.

Wie diese Gleichungen gebildet und die gefundenen algebraischen Endresultate geometrisch construirt werden kön-

nen, wollen wir an den einzelnen Aufgaben selbst zeigen; in letzterer Beziehung aber hier noch diejenigen Ausdrücke zusammen stellen, welche im Vorhergehenden ihre Bedeutung, hinsichtlich der geometrischen Construction, schon erhalten haben. Nämlich bezeichnen a, b, c...x Linien, so ist:

$x=a+b=$ der Summe zweier Linien (§. 1. Z. 6.)

$x=a-b=$ der Differenz zweier Linien (§. 1. Z. 8.)

$x=\frac{bc}{a}=$ der vierten geometrischen Proportionale zu a, b, c (§. 64 Z. 1).

$x=\frac{bb}{a}=$ der dritten geometrischen Proportionale zu a, b (§. 65 Z.)

$x=\sqrt{ab}=$ der mittlern geometrischen Proportionale zwischen a und b (§. 72 Z.)

$x=\sqrt{a^2+b^2}=$ der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Katheten a, b sind (§. 110 Z. 4.)

$x=\sqrt{a^2-b^2}=$ einer Kathete eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse a und dessen andere Kathete b ist (§. 110 Z. 4.)

Käme der Ausdruck $x=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ vor, so schreibe man $x=\sqrt{a^2+\frac{1}{4}a^2}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}$ d. h. x^2 ist in diesem Falle die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten a, $\frac{a}{2}$ sind.

Der Ausdruck $x=\sqrt{\frac{3}{4}a^2}=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}a^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$ wird jetzt auch seine Bedeutung haben.

A. Vermischte Aufgaben.

§. 183.

Aufgabe. Der Flächenraum eines gegebenen Rechtecks soll in ein Quadrat verwandelt werden; wie groß muß die Seite des letztern angenommen werden?

Auflösung. Die beiden zusammenstoßenden Seiten des gegebenen Rechtecks seyen, a, b, so ist der Flächenraum $= ab$. Setzt man die Seite des gegebenen Quadrats $= x$, so ist der Flächenraum desselben $= x^2$, daher die Gleichung:

$$x^2 = a.b,$$

und daraus $x = \pm\sqrt{a.b.}$

Construction. Aus $x = \pm\sqrt{ab}$ folgt $x^2 = ab$ und daraus die Proportion

$$a : x = x : b,$$

welche nun nach §. 72 leicht zu construiren ist.

§. 184.

Aufgabe. Man soll ein Rechteck verzeichnen, das einem gegebenen Quadrat am Inhalt gleich ist und eine gegebene Seite hat.

Auflösung. Der Inhalt des gegebenen Quadrats sey a^2, die eine gegebene Seite des Rechtecks sey b, und die zu suchende x; so ist der Inhalt des Rechtecks $= bx$. Der Inhalt beider Figuren soll gleich seyn, daher die Gleichung:

$$bx = a^2, \text{ oder}$$

$$x = \frac{a^2}{b}$$

Construction. Aus §. 65.

§. 185.

Aufgabe. Ein Rechteck zu construiren, das der Differenz zweier gegebener Quadrate gleich ist und dessen Seiten sich verhalten $= m : n$.

Auflösung. Die beiden gegebenen Quadrate seyen a^2, b^2; also ihre Differenz $= a^2 - b^2$. Ist die eine Seite des Rechtecks $= x$, so ist die andere $\frac{m}{n} x$; folglich der Flächenraum des Rechtecks $= x \cdot \frac{m}{n} x = \frac{mx^2}{n}$; man erhält daher folgende Gleichung:

$$\frac{mx^2}{n} = a^2 - b^2, \text{ und daraus}$$

$$x^2 = \frac{n(a^2 - b^2)}{m}; \text{ also}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{n}{m}(a^2 - b^2)}.$$

Construction. Von den zwei Zeichen vor dem Wurzelzeichen kann nur das obere gelten, da der Werth von x positiv seyn muß. Den gefundenen Ausdruck bringe man in folgende Form:

$$x = \sqrt{\frac{n}{m}(a+b)(a-b)}$$

und construire $m : n = (a+b) : z$ und sodann $z(a-b) = r^2$, so ist $x = \sqrt{r^2} = r$.

§. 186.

Aufgabe. Eine gerade Linie so zu theilen, daß das Rechteck aus den beiden Stücken einem gegebenen Quadrate gleich ist.

Auflösung. Das gegebene Quadrat sey $= m^2$; die gegebene Linie $= a$; setzt man das eine Stück derselben $= x$, so ist das andere $= a - x$. Der Flächenraum des gesuchten Rechtecks $= (a - x) x$; mithin gilt folgende Gleichung:

$$(a - x) x = m^2, \text{ daraus}$$

$$x^2 - ax = - m^2, \text{ oder}$$

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{4} a^2 = \tfrac{1}{4} a^2 - m^2$$

$$x - \tfrac{1}{2} a = \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} a^2 - m^2}$$

$$x = \tfrac{1}{2} a \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2}$$

Construction. Da offenbar $\tfrac{1}{2} a > \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2}$, so ergeben sich für x zwei positive Werthe, nämlich:

$$x = \begin{cases} \frac{1}{2}a + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2} \\ \frac{1}{2}a - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2} \end{cases}$$

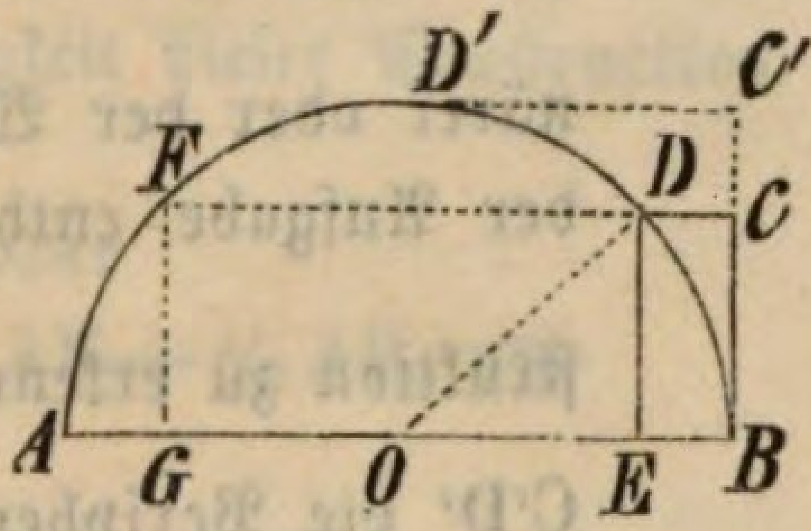
also auch für $a - x$ zwei Werthe, nämlich:

$$a - x = \begin{cases} a - \left[\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2}\right] \\ a - \left[\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2}\right] \end{cases} = \begin{cases} \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2} \\ \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2} \end{cases}$$

Läßt man für x den ersten Werth gelten, so muß für $a - x$ ebenfalls der erste Werth genommen werden und umgekehrt.

Um diese beiden Ausdrücke nun zu construiren, beschreibe man über $AB = a =$ der gegebenen Geraden einen Halbkreis, im Endpunkt B des Durchmessers AB errichte man eine Senkrechte $BC = m =$ der Seite des gegebenen Quadrats und ziehe $CD \parallel AB$, bis die Peripherie in D getroffen ist, fällt man endlich $DE \perp AB$, so ist die Gerade AB im Punkte E, wie verlangt, getheilt. (Fig. 199.)

Fig. 199.



Beweis. Man ziehe den Halbmesser OD, so ist

$$OE^2 = OD^2 - DE^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2 \text{ (§. 110. Z. 2.)}$$

daher $OE = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2}$; mithin

$$AE = AO + OE = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2} = x$$

und $EB = OB - OE = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2} = a - x.$

Also AE und EB die beiden gesuchten Stücke von AB. Den andern Werth von x erhält man, wenn man CD verlängert, bis die Peripherie in einem zweiten Punkt F getroffen wird; zieht man $FG \perp AB$, so ist G ein zweiter Punkt, in welchem AB, nach Verlangen, getheilt ist.

Man überzeugt sich hier leicht, daß $AE = BG$ und $EB = AG$ ist, oder daß, wenn man die beiden Werthe von x, durch x', x'' bezeichnet, die beiden entsprechenden Werthe von $a - x$ alsdann x'', x' werden, was schon oben aus der Vergleichung der Werthe von x und $a - x$ sich ergibt.

Die Unbekannte x erhält aber aus dem Endresultat

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2}$$

nur einen Werth, wenn das Glied auf der rechten Seite der Gleichung das die zwei entgegengesetzten Vorzeichen hat, hinwegfällt, nämlich wenn $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2} = 0$ wird. Dieses geschieht aber, wenn $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2 = 0$, oder $\frac{a}{2} = m$ wird. Ist nämlich $m = \frac{a}{2} = BC'$, so trifft CD' die Peripherie des Kreises nur in einem Punkt D' und es ist $x = AO = \tfrac{1}{2}a$.

Würde $m > \frac{a}{2}$, also $m^2 > \left(\frac{a}{2}\right)^2$; mithin $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2$ eine negative Größe, so ist der Werth aus $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - m^2}$ ein imaginärer oder der Werth von x unmöglich, d. h. die Bedingungen der Aufgabe enthalten einen Widerspruch, was auch die Construktion zu erkennen gibt; denn wäre $BC' = m > \frac{a}{2}$ so würde C'D' die Peripherie des Kreises nicht treffen.

§. 187.

Aufgabe. Eine gegebene Gerade nach dem äußern und mittlern Verhältniß zu theilen.

Auflösung. Es sey die gegebene Gerade $= a$, die Mediane $= x$, so ist das kleinere Stück $= a - x$. Man hat daher vermöge der Bedingung der Aufgabe folgende Proportion:

$$(a - x) : x = x : a.$$

Wird diese Proportion in eine Gleichung verwandelt und aus dieser die Unbekannte x gesucht, so erhält man für diese

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Construction. Da $\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} > \tfrac{1}{2}a$, so kann nur der positive Werth der Quadratwurzel der Aufgabe genügen, weil der Werth für x nicht negativ seyn kann; daher ist

$$x = -\tfrac{1}{2}a + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

Im Endpunkte B der Geraden $AB = a =$ der gegebenen Geraden errichte man $BC = \frac{1}{2} AB$ senkrecht auf AB, ziehe AC, mache $CD = BC$, und $AE = AD$, so ist im Punkte E die Gerade, wie verlangt, getheilt. (Fig. 175.)

Beweis. $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{2}{a}\right)^2}$. Nun ist $AE =$

$AD = AC - CD = AC - BC = -\frac{1}{2} a + \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$; mithin

$AE = x$ und $BE = a - x$ oder

$$BE : AE = AE : AB,$$

wenn man in der Proportion $(a - x) : x = x : a$, für $a - x$, x die gefundenen Linien setzt.

Man vergleiche übrigens noch diese so eben gegebene Construction mit der Auflösung derselben Aufgabe in §. 158. Z. 2.

Unmittelbar, d. h. ohne die algebraischen Werthe der Linien wieder einzuführen, läßt sich die Richtigkeit dieser Construction auch so erweisen:

Es ist $AC^2 = AB^2 + BC^2$ oder

weil $AC = AD + CD = AE + \frac{1}{2} AB$, und

$BC = \frac{1}{2} AB$,

so ist $(AE + \frac{1}{2} AB)^2 = AB^2 + (\frac{1}{2} AB)^2$, nämlich

$$AE^2 + AE \cdot AB + \frac{1}{4} AB^2 = AB^2 + \frac{1}{4} AB^2$$

$$AE^2 + AE \cdot AB = AB^2$$

$$AE^2 = AB^2 - AE \cdot AB$$

$$= AB\,(AB - AE)$$

$$= AB \cdot BE$$

folglich $BE : AE = AE : AB$

Anmerkung. Die algebraische Lösung und Construktion dieser Aufgabe zeigt deutlich, wie man sich in Fällen, wo die unmittelbare Construction einer geometrischen Aufgabe nicht gelingen will, der algebraischen Lösung bedienen, und aus der Construktion des algebraischen Endresultats eine unmittelbare Construktion ableiten kann. Wir wollen noch zu diesem Zweck folgende Aufgabe algebraisch lösen und construiren:

Die Mediane einer Geraden, die nach dem äußern und mittlern Verhältniß getheilt ist, ist gegeben; man soll die Größe dieser Geraden bestimmen.

Auflösung. Die gegebene Mediane sey $= b$; die gesuchte Gerade $= x$, so ist $x - b$ das kleinere Stück derselben. Gemäß der Bedingung muß seyn:

$(x - b) : b = b : x$; also

$x^2 - bx = b^2$, und daraus, nach gehöriger Reduction: $x = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

Construction. Construirt man ein rechtwinkeliges Dreieck, dessen Katheten b, $\frac{1}{2}$b sind, und verlängert man die Hypotenuse um $\frac{1}{2}$b, so ist x gefunden. Die Uebereinstimmung dieser Construction mit der des §. 168. Z. 4, welcher derselben Aufgabe zugehört, leuchtet von selbst ein.

Wie würde nun folgende, hieher gehörige Aufgabe:

Von einer Geraden, die nach dem äußern und mittlern Verhältniß getheilt ist, ist das kleinere Stück derselben bekannt; man soll diese Gerade selbst bestimmen,

zu lösen und zu construiren seyn?

§. 188.

Aufgabe. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist nebst der einen Kathete die Summe der Hypotenuse und der andern Kathete gegeben; man soll die beiden letztern einzeln bestimmen.

Auflösung. Es sey die gegebene eine Kathete $= a$, die gegebene Summe der Hypotenuse und der andern Kathete $= s$. Bezeichnet man die unbekannte Hypotenuse mit z und die unbekannte zweite Kathete mit x, so erhält man folgende Gleichungen:

I) $z + x = s$ (V. D. B.)

II) $z^2 - x^2 = a^2$ (§. 110 Z. 2.)

II) $(z + x)(z - x) = a^2$

$s.(z - x) = a^2$

$$z - x = \frac{a^2}{s}$$

Nun ist auch $z + x = s$.

$$\text{daher } z = \frac{s^2 + a^2}{2s}$$

$$\text{und } x = \frac{s^2 - a^2}{2s}$$

Die beiden gefundenen Endgleichungen lassen sich nun construiren und also die Werthe von z und x selbst einzeln darstellen.

Sind die gegebenen Stücke gemessen und die Längen derselben in Fuß, Zoll, Linien ꝛc. angegeben, so lassen sich jetzt auch die unbekannten Stücke in denselben Benennungen ausdrücken.

Z. B. Es sey $a = 3'$; $s = 9'$; so ist $z = \frac{81\square' + 9\square'}{2 . 9'} = 5'$ und $x = \frac{81\square' - 9\square'}{2 . 9'} = 4'$.

§. 189.

Aufgabe. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist nebst der einen Kathete die Differenz der Hypotenuse und der andern Kathete gegeben; man soll die beiden letztern einzeln bestimmen.

Auflösung. Es sey die gegebene Differenz $= d$, so ist, wenn man die übrige Bezeichnung der vorigen Aufgabe beibehält:

$$\text{I)}\ z - x = d$$
$$\text{II)}\ z^2 - x^2 = a^2$$

$$\text{II)}\ (z + x)(z - x) = a^2$$
$$d\,(z + x) = a^2$$
$$z + x = \frac{a^2}{d}$$

Nun ist auch $\text{I)}\ z - x = d$

$$\text{daher}\ z = \frac{a^2 + d^2}{2d}$$
$$\text{und}\ x = \frac{a^2 - d^2}{2\,d}$$

Beispiel. Es sey in einem rechtwinkeligen Dreieck die Hypotenuse um 3' 6'' 5''' größer als die eine Kathete, wie groß sind diese beiden Seiten einzeln, wenn die andere Kathete 5' 6'' 7''' ist?

§. 190.

Aufgabe. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist nebst

der Hypotenuse die Summe der beiden Katheten gegeben; man soll letztere einzeln bestimmen.

Auflösung. Die beiden Katheten seyen x, y, und ihre bekannte Summe $=s$; die Hypotenuse sey h. Man erhält folgende Gleichungen:

$$\text{I)}\ x+y=s$$
$$\text{II)}\ x^2+y^2=h^2$$

daraus I) $x^2+y^2+2xy=s^2$ (Wenn man die erste Gleichung
II) $x^2+y^2 \quad =h^2$ quadrirt.)

$$2xy=s^2-h^2$$

Also ist auch $x^2+y^2-2xy=h^2-(s^2-h^2)$

oder $(x-y)^2=2h^2-s^2$

$$x-y=\pm\sqrt{2h^2-s^2}$$

Nun ist $x+y=s$

daher $x=\dfrac{s\pm\sqrt{2h^2-s^2}}{2}$

und $y=\dfrac{s\mp\sqrt{2h^2-s^2}}{2}$

Beispiel. Es sey $s=54'\ 2''\ 6'''$, $h=39'\ 5''$; wie groß ist x, y?

§. 191.

Aufgabe. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist nebst der Hypotenuse die Differenz der beiden Katheten gegeben, wie groß ist jede einzelne Kathete?

Auflösung. Die beiden Katheten seyen x, y; und ihre Differenz $=d$; so wird man, wenn h die Hypotenuse bezeichnet, folgende zwei Gleichungen der Aufgabe ableiten können:

$$\text{I)}\ x-y=d$$
$$\text{II)}\ x^2+y^2=h^2$$

Daraus ergibt sich $x^2+y^2-2xy=d^2$ (Wenn man Gleichung I. quadrirt.)

und $2xy=h^2-d^2$ (Wenn man die letzte Gleichung von Gleichung II. subtrahirt.)

Also auch $x^2+y^2+2xy=2h^2-d^2$

oder $x+y=\pm\sqrt{2h^2-d^2}$

und weil $x - y = d$

$$\text{so ist } x = \frac{d \pm \sqrt{2h^2 - d^2}}{2}$$

$$\text{und } x = \frac{d \mp \sqrt{2h^2 - d^2}}{2}.$$

Wie werden diese Endresultate construirt?

§. 192.

Aufgabe. In einem rechtwinkeligen Dreieck ist die Höhe, nämlich die Senkrechte von der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse, nebst der Snmme der beiden Katheten gegeben; man soll die beiden Katheten und die Hypotenuse bestimmen.

Auflösung. Die beiden unbekannten Katheten seyen $= x, y$; die unbekannte Hypotenuse $= z$; ferner die bekannte Summe der beiden Katheten $= s$, und die bekannte Höhe $= p$; so erhält man folgende drei Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten:

$$\text{I) } x \cdot y = p \cdot z$$

$$\text{II) } x + y = s$$

$$\text{III) } x^2 + y^2 = z^2$$

Die Reduction dieser Gleichungen und das Auffinden der drei Unbekannten wird etwas verwickelt werden; wir wollen einen Kunstgriff angeben, der sich in ähnlichen Fällen mit Vortheil anwenden läßt, nach welchem es Gleichungen gibt, die nur noch zwei Unbekannte enthalten.

Nämlich, da die Summe der beiden Katheten gegeben ist, so bezeichne man ihre Differenz als eine zu suchende Unbekannte, nenne diese δ, und drücke jetzt die beiden Katheten einzeln aus. d. h. $x + y = s$, und $x - y = \delta$; daraus ist $x = \frac{s + \delta}{2}$, und $y = \frac{s - \delta}{2}$.

Daher hat man nur folgende zwei Gleichungen, welche allen Bedingungen der Aufgabe genügen, aufzulösen:

$$\text{I) } \left(\frac{s + \delta}{2}\right) \left(\frac{s - \delta}{2}\right) = pz$$

$$\text{II) } \left(\frac{s + \delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{s - \delta}{2}\right)^2 = z^2$$

$$\text{I)}\ {}^1/_4\, s^2 - {}^1/_4\, \delta^2 = pz$$
$$\text{II)}\ {}^1/_2\, s^2 + {}^1/_2\, \delta^2 = z^2$$

$$\text{I)}\ s^2 - \delta^2 = 4pz$$
$$\text{II)}\ s^2 + \delta^2 = 2z^2$$

$2s^2 = 2z^2 + 4pz$, und daraus

findet man $z = -p \pm \sqrt{s^2 + p^2}$

und $\delta = \pm \sqrt{s^2 - 4pz}$

Da die Werthe von z und δ nur positiv seyn können, so muß seyn

$$z = -p + \sqrt{s^2 + p^2}, \text{ und}$$
$$\delta = \sqrt{s^2 - 4pz} = \sqrt{s^2 + 4p\,(p - \sqrt{s^2 + p^2}\,)}$$

Bestimmen wir nun die Werthe von x und y, so erhält man, weil $x = \frac{s + \delta}{2}$ und $y = \frac{s - \delta}{2}$

$$x = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4p\,(p - \sqrt{s^2 + p^2}\,)}}{2}$$

$$y = \frac{s - \sqrt{s^2 + 4p\,(p - \sqrt{s^2 + p^2}\,)}}{2}$$

Construction. Man construire zuerst $\sqrt{s^2 + p^2} = m$, sodann $p - m = q$. Ferner $4p \,.\, q = r^2$, und endlich $\sqrt{s^2 + r^2} = t$; so ist $x = \frac{s + t}{2}$ und $y = \frac{s - t}{2.}$

§. 193.

Aufgabe. Die Hypotenuse und der Flächenraum eines rechtwinkeligen Dreiecks sind gegeben; man soll jede der beiden Katheten finden.

Auflösung. Es bezeichne q^2 den gegebenen Flächenraum, h die gegebene Hypotenuse, nnd x, y die unbekannten Katheten, so ist

$$\text{I)}\ x^2 + y^2 = h^2$$
$$\text{II)}\ {}^1/_2\, x \,.\, y = q^2$$

Daraus II) $x = \frac{2\,q^2}{y}$

$$\text{I)}\quad \frac{4q^4}{y^2} + y^2 = h^2$$

$$4q^4 + y^4 = h^2 y^2$$

$$y^4 - h^2 z^2 = -4q^4$$

$$y^2 - \tfrac{1}{2}h^2 = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}h^4 - 4q^4}$$

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{2}h^2 \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}h^4 - 4q^4}}$$

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}h^2 \mp \sqrt{\tfrac{1}{4}h^4 - 4q^4}}$$

Da die Werthe für x und y positiv seyn müssen, so muß das Zeichen des äußern Wurzelzeichens positiv seyn; von den Vorzeichen der beiden innern Wurzelgrößen gelten entweder die beiden obern oder die beiden untern zugleich.

Construction. Man bringe vorher eine der beiden Endgleichungen auf folgende Form:

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{2}h^2 + h\sqrt{\tfrac{1}{4}h^2 - \frac{4q^4}{h^2}}}$$

und construire zuerst $\frac{4q^4}{h^2} = m^2$; nämlich indem man $\frac{4q^4}{h^2} = 4 . \frac{q^2}{h} . \frac{q^2}{h}$ setzt, und zuerst $\frac{q^2}{h} = n$, also $\frac{q^2}{h} . \frac{q^2}{h} = n^2$ und $4\frac{q^4}{h^2} = m^2$ construirt, sodann $\tfrac{1}{4}h^2 - m^2 = r^2$; so ist

$$y = \sqrt{\tfrac{1}{2}h^2 + hr}, \text{ und}$$

$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}h^2 - hr},$$

welche Ausdrücke nun einfach und leicht zu verzeichnen sind.

Beispiel. Der Flächenraum eines rechtwinkeligen Dreiecks ist 100 Quadratfuß; wie groß ist jede der beiden Katheten, wenn die Hypotenuse $25\tfrac{1}{2}$ Fuß ist?

§. 194.

Aufgabe. Der Flächenraum eines rechtwinkeligen Dreiecks, so wie die Summe der drei Seiten ist gegeben; man soll letztere einzeln bestimmen.

Auflösung. Bezeichnet q^2 den gegebenen Flächenraum, s die gegebene Summe der drei Seiten, x, y die beiden unbekannten Katheten und z die unbekannte Hypotenuse, so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$\text{I)}\quad {}^1\!/_2\, x \,.\, y = q^2$$
$$\text{II)}\quad x + y + z = s$$
$$\text{III)}\quad x^2 + y^2 = z^2$$

$$\text{I)}\quad y = \frac{2q^2}{x}$$

$$\text{II)}\quad x + \frac{2q^2}{x} + z = s$$
$$\text{III)}\quad x^2 + \frac{4q^4}{x^2} = z^2$$

$$\text{II)}\quad z = s - x - \frac{2q^2}{x}$$
$$\text{III)}\quad z = \pm\sqrt{x^2 + \frac{4q^4}{x^2}}$$

$$s - x - \frac{2q^2}{x} = \pm\sqrt{x^2 + \frac{4q^4}{x^2}}$$

$$\frac{s^2x^2 - 2sx^3 + x^4 - 4sxq^2 + 4x^2q^2 + 4q^4}{x^2} = \frac{x^4 + 4q^4}{x^2}$$

$$s^2x - 2sx^2 + 4xq^2 = 4sq^2$$
$$x^2 - \frac{s^2 + 4q^2}{2s}\, x = -2q^2$$
$$x = \frac{s^2 + 4q^2 \pm \sqrt{s^4 - 24s^2q^2 + 16q^4}}{4s}$$
$$y = \frac{2q^2}{x} = \frac{4sq^2}{s^2 + 4q^2 \pm \sqrt{s^4 - 24s^2q^2 + 16q^4}}$$
$$= \frac{s^2 + 4q^2 \mp \sqrt{s^4 - 24s^2q^2 + 16p^4}}{4s}$$
$$z = s - (x + y)$$
$$= s - \frac{2s^2 + 8q^2}{4s} = \frac{s^2 - 4q^2}{2s}$$

Construction. Man bringe den Ausdruck $\sqrt{s^4 - 24s^2q^2 + 16q^4}$ auf folgende Form: $s\sqrt{s^2 - 24q^2 + 16\,\frac{q^4}{s^2}}$ und verfahre, wie bisher angedeutet worden.

§. 195.

Aufgabe. Man soll die Bedingungen bestimmen, unter welchen die drei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks

ein rationales Verhältniß zu einander haben, d. h. wenn man die drei Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks in Zahlen ausdrückt, diese rationale Zahlen vorstellen.

Auflösung. Es bezeichnen $k_,$ und $k_{,,}$ die beiden Katheten und h die Hypotenuse irgend eines rechtwinkeligen Dreiecks, so muß dem Verlangen der Aufgabe gemäß, sowohl $h^2 - k_,^2$ als auch $h^2 - k_{,,}^2$ eine vollständige Quadratzahl seyn, wenn diese Linien durch Zahlengrößen ausgedrückt sind.

Nun denke man sich zwei Zahlen x, y von solcher Beschaffenheit, daß folgende zwei Gleichungen

$$x + y = h$$
$$x - y = k_,$$

Statt finden, was ohne Schwierigkeit angenommen werden kann, da, wenn h und $k_,$ gegeben sind, aus diesen Gleichungen selbst die Werthe von x und y gefunden werden können.

Weil nun für die drei Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks

$$h^2 = k_,^2 + k_{,,}^2, \text{ oder}$$
$$h^2 - k_,^2 = k_{,,}^2$$

gilt; so ist, wenn man obige Werthe setzt, auch

$(x + y)^2 - (x - y)^2 = k_{,,}^2$, oder wenn man gehörig reducirt

$$4xy = k_{,,}^2 \text{ und daraus}$$
$$\sqrt{4xy} = k_{,,} = 2\sqrt{xy}.$$

Nun muß, um der Aufgabe zu genügen, der Werth $k_{,,}$ rational seyn; dieses ist aber der Fall, wenn $x \cdot y$ eine vollständige Quadratzahl ist, was der Fall ist, wenn entweder $x = y$ oder x und y selbst vollständige Quadratzahlen sind. Ersteres, nämlich $x = y$, kann nicht Statt finden, weil unter dieser Voraussetzung die Kathete $k_, =$ Null wird, daher setze man $x = m^2$ und $y = n^2$, so ist $k_{,,} = 2\sqrt{m^2n^2} = 2mn$.

Werden diese Werthe für x und y in die oben angenommenen zwei Gleichungen substituirt, so erhält man

$$m^2 + n^2 = h$$
$$m^2 - n^2 = k_,$$

und $2mn = k_{,,}$ wie eben gefunden worden.

Werden nun für m, n positive rationale Zahlen mit der Einschränkung gesetzt, daß $m > n$ (weil sonst $k_,$ negativ) und auch m und $n > 0$ ist (weil sonst $k_{,,} = 0$ würde), so haben

die drei Seiten des rechtwinkeligen Dreiecks, wie verlangt, ein rationales Verhältniß zu einander.

Denn man setze z. B. $m=2$, $n=1$, so ist

$$m^2+n^2=4+1=5=h$$
$$m^2-n^2=4-1=3=k,$$
$$\text{und } 2mn=2.4.1=4=k,,$$

oder die drei Seiten, die sich $=5:3:4$ verhalten, schließen ein rechtwinkeliges Dreieck ein.

Um nun alle diejenigen Zahlen, welche die Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks vorstellen und zugleich die oben verlangten Eigenschaften haben, zu erhalten, lege man folgende Tafel an:

Ist	m =	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6	6	7	7	
	n =	1	1	2	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3	4	5	1	2	u.
so ist	h =	5	10	13	17	20	25	26	29	34	41	37	40	45	52	61	50	53	s.
	k, =	3	8	5	15	12	7	24	21	16	9	35	32	27	20	11	48	45	w.
	k,, =	4	6	12	8	16	24	10	20	30	40	12	24	36	48	60	14	28	

Man kann für m, n auch gebrochene Zahlen, jedoch mit der oben gegebenen Einschränkung setzen. So ist z. B., wenn $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{3}$ gesetzt wird, $h=\frac{13}{36}$, $k,=\frac{5}{36}$, $k,,=\frac{1}{3}$ ꝛc.

§. 196.

Aufgabe. Von einem Dreieck sind die drei Seiten gegeben; man soll bestimmen:

I) die beiden Abschnitte, in welche die Senkrechte, von einer Winkelspitze auf die gegenüberliegende Seite gefällt, letztere theilt;

II) die Senkrechte selbst;

III) den Flächenraum des Dreiecks.

Auflösung. I. Theil. Es seyen (Fig. 126) die gegebenen drei Seiten des Dreiecks ABC, $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$; ferner sey $AD \perp BC$ und der eine unbekannte Abschnitt $BD=x$, so ist der andere Abschnitt $DC=a-x$, und endlich sey die Senkrechte $AD=y$.

Um nun die beiden Unbekannten (x, y) zu bestimmen, leite man aus den beiden rechtwinkeligen $\triangle\triangle$ ABD, ACD (nach §. 110) folgende zwei Gleichungen ab:

$$\text{I)}\ AD^2 = AB^2 - BD^2$$
$$\text{II)}\ AD^2 = AC^2 - DC^2$$

oder, wenn man die oben angegebene Bezeichnung einführt:

$$\text{I)}\ y^2 = c^2 - x^2$$
$$\text{II)}\ y^2 = b^2 - (a-x)^2$$

Daraus folgt nun sogleich:

$$c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2, \text{ oder}$$
$$c^2 - x^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2, \text{ daraus}$$
$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = BD$$
$$\text{und } a - x = a - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$
$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} = DC.$$

Zusatz 1. Ist $b^2 > a^2 + c^2$, so wird $x = BD$ negativ, d. h. der Punkt D fällt nicht zwischen B und C, sondern in die Verlängerung von BC in der entgegengesetzten Richtung, nämlich in die Verlängerung von C nach B, das Dreieck ABC ist sodann bei B stumpfwinkelig. Eben so ist $a - x = DC$ negativ, wenn $c^2 > a^2 + b^2$, und in diesem Fall ist $\triangle ABC$ bei C stumpf.

Daß dieses mit der Natur der Sache vollkommen übereinstimmt, davon kann man sich überzeugen, wenn man die dazu gehörigen Figuren sich zeichnet (Fig. 127, 128), aus diesen die Bedingungsgleichungen sich ableitet und entwickelt.

Die oben gefundenen Ausdrücke für BD und DC, wenn beide sowohl einem spitzen als stumpfen Winkel anliegen, können auch unmittelbar aus §§. 112, 113 abgeleitet werden.

Zusatz 2. Ist $\triangle ABC$ gleichschenkelig, nämlich ist $AB = AC$, also $c = b$, so wird $x = BD = \frac{a}{2}$ und $a - x = DC = \frac{a}{2}$; wie es in Uebereinstimmung mit §. 37. I im gleichschenkeligen Dreieck seyn muß.

Auflösung. II. Theil. Man substituire in der oben erhaltenen Bedingungsgleichung

$$y^2 = c^2 - x^2$$

den eben gefundenen Werth für x, und entwickle gehörig, so wird $y^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2$

$$y^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

$$\begin{aligned} 4a^2y^2 &= (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2) \\ &= ((a+c)^2 - b^2)(b^2 - (a-c)^2) \\ &= (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a) \end{aligned}$$

Oder, wenn man die Faktoren der rechten Seite der Gleichung in folgende Ordnung bringt, zuvor aber beide Seiten der Gleichung durch $4a^2$ dividirt, ist

$$y^2 = \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4a^2}$$

Daraus folgt:

$$y = \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$$

Setzt man, um den Ausdruck einfacher darzustellen, die halbe Summe der drei Seiten $= s$, nämlich $\frac{a+b+c}{2} = s$; so ist $a+b+c = 2s$; $b+c-a = 2(s-a)$; $a+c-b = 2(s-b)$ und $a+b-c = 2(s-c)$ und daher

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2a}\sqrt{2s.2(s-a).2(s-b).2(s-c)} \\ &= \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = AD \end{aligned}$$

Zusatz 1. Bezeichnet y' die Senkrechte auf **b** und y'' die Senkrechte auf c, so erhält man durch dasselbe Verfahren:

$$y' = \frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$y'' = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Zusatz 2. Ist das Dreieck gleichseitig, nämlich $a = b = c$; so ist

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2a}\sqrt{3a.a.a.a} \\ &= \frac{1}{2a}\sqrt{3a^4} = {}^1\!/_2 a\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ebenso wird $y' = y'' = {}^1\!/_2 a\sqrt{3} = y$; nämlich die drei Höhen sind einander gleich, wie es im gleichseitigen Dreieck seyn muß.

Zusatz 3. Es ist auch

$$y : y' = \frac{2}{a} : \frac{2}{b}$$
$$= b : a$$
$$\text{und } y : y'' = \frac{2}{a} : \frac{2}{c}$$
$$= c : a$$
$$\text{daher } y' : y'' = c : b,$$

d. h. die Seiten stehen im umgekehrten Verhältniß mit ihren Höhen. Vergleiche §. 76. I.

Auflösung. III Theil. Der Flächenraum des Dreiecks ABC $= \frac{BC \,.\, AD}{2} = \frac{a \,.\, y}{2}$ (§. 101. Z. 3). Setzt man diesen Flächenraum $= Q$ und substituirt für y den in voriger Auflösung gefundenen Werth, so ist

$$Q = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2a} \sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)}$$
$$= \tfrac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)}$$

Oder auch

$$Q = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$
$$= \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},$$

d. h. der Flächenraum eines Dreiecks durch seine drei Seiten ausgedrückt, ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt folgender vier Factoren: der halben Summe der drei Seiten und der drei Differenzen, welche entstehen, wenn man jede Seite einmal von dieser halben Summe subtrahirt.

Zusatz. Ist das Dreieck ABC gleichseitig, also $a = b = c$, so ist, weil in diesem Fall (Siehe oben)

$$y = \tfrac{1}{2}\, a\sqrt{3},$$
$$Q = \frac{ay}{2} = \tfrac{1}{4}\, a^2 \sqrt{3}.$$

Beispiel. Wie groß ist der Abschnitt BD, die Senkrechte AD und der Flächenraum des Dreiecks ABC, wenn AB = 95′ 6″, AC = 86′ 7″ 5‴ und BC = 106′ 8″ ist?

Wie groß ist der Flächenraum eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite = 10′ ist? Wie groß ist die Höhe dieses Dreiecks?

In einem gleichschenkeligen Dreieck sey die Grundlinie = 12′, der eine Schenkel = 20′; wie groß ist der Flächenraum dieses Dreiecks?

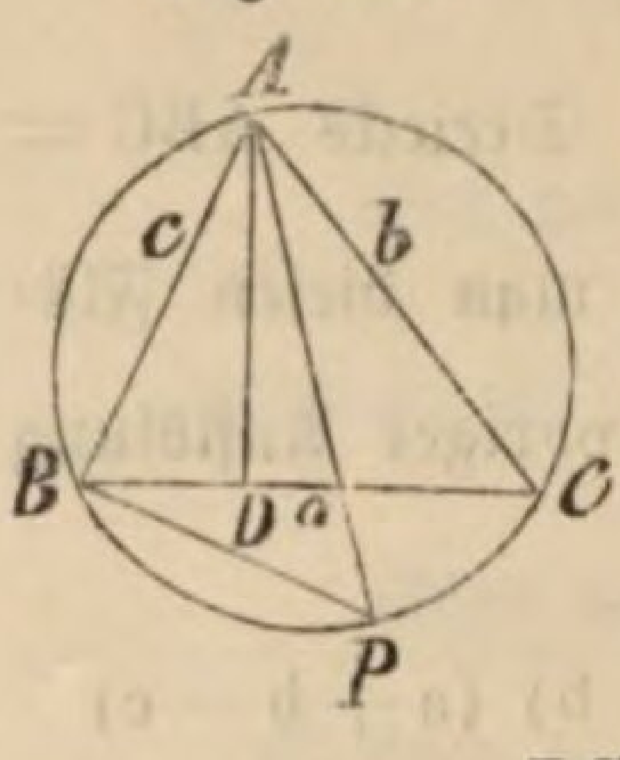
Wenn der Flächenraum eines gleichseitigen Dreiecks = 100 Quadratfuß ist, wie groß ist eine Seite?

Aus der Gleichung $Q = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$, folgt a = ?

Zusatz 4. Hier mögen noch folgende Sätze eine Stelle finden:

I. Wenn man um ein Dreieck ABC (Fig. 200) einen Kreis beschreibt, die drei Seiten desselben mit a, b, c, den Halbmesser des umschriebenen Kreises mit r und den Flächeninhalt des Dreiecks mit Q bezeichnet, so ist

Fig. 200.



$$Q = \frac{abc}{4r}$$

Denn $Q = \frac{BC.AD}{2} = \frac{a.AD}{2}$, wenn $AD \perp BC$ gezogen ist; zieht man noch den Durchmesser AP, so wie BP, so ist $\triangle ADC \sim \triangle ABP$, daher $AD : AC = AB : AP$ oder $AD : b = c : 2r$ und daraus $AD = \frac{bc,}{2r}$, folglich $Q = \frac{abc}{4r.}$

Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$r = \frac{abc}{4Q}$$

II. Wenn man in ein Dreieck einen Kreis, dessen Halbmesser = r′ beschreibt, und man läßt für das Dreieck die obige Bezeichnung gelten, so ist

$$Q = \frac{(a+b+c)\,r'}{2}$$

und daraus

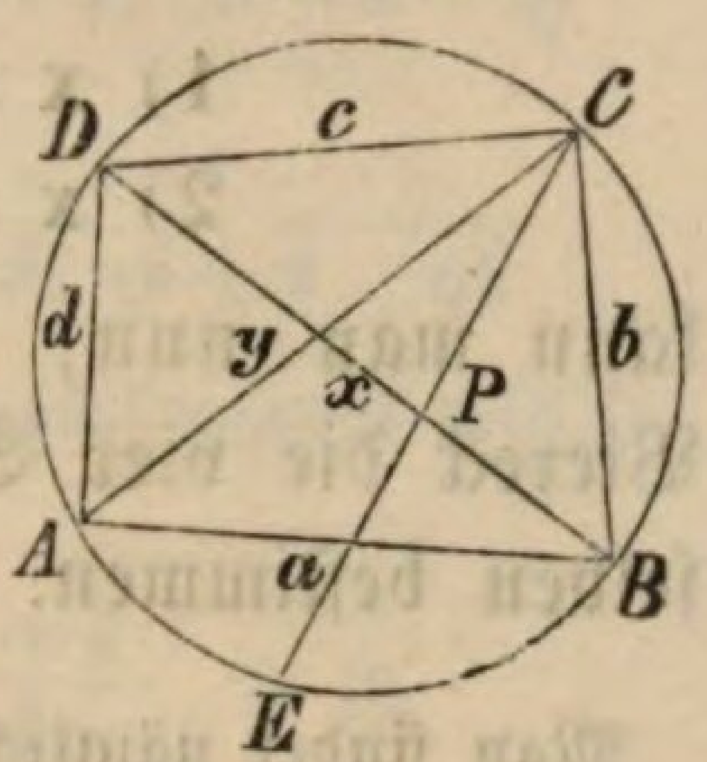
$$r' = \frac{2Q}{a+b+c}$$

Denn (Fig. 181) ON = OM = OP = r′ (§. 162); daher $\triangle BOC = \frac{ar'}{2}$; $\triangle AOC = \frac{br'}{2}$ und $\triangle AOB = \frac{cr'}{2}$; weil aber

$Q = \triangle BOC + \triangle AOC + \triangle AOB$

so ist $Q = \frac{(a+b+c)\,r'}{2}$

Fig. 201.



III. Wenn man um ein Viereck ABCD (Fig. 201) in welchem die Summe der gegenüberliegenden Winkel = 2R ist (§. 152 Z. 6), einen Kreis beschreibt, die vier Seiten AB, BC, CD, DA mit a, b, c, d; die beiden Diagonalen DB, AC mit x, y und den Halbmesser des umschriebenen Kreises mit r bezeichnet, so ist

1) $x : y = (ab + cd) : (bc + ad)$

2) $x \,.\, y = ac + bd.$

Denn $\triangle BDC = \frac{bcx}{4r}$

$\triangle BDA = \frac{adx}{4r}$

$\triangle ACD = \frac{cdy}{4r}$

$\triangle ACB = \frac{aby}{4r}$

Weil nun aber $\triangle BDC + \triangle BDA = \triangle ACD + \triangle ACB$, so ist

$$\frac{bcx}{4r} + \frac{adx}{4r} = \frac{cdy}{4r} + \frac{aby}{4r}, \text{ oder}$$

$(bc + ad)\, x = (cd + ab)\, y$, nämlich

1) $x : y = (ab + cd) : (bc + ad)$

Macht man ferner arc. BE = arc. AD und zieht CE, so findet man $\triangle CPB \sim \triangle ADC$ und $\triangle CPD \sim \triangle ACB$. Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke ergeben sich folgende zwei Proportionen:

α) $PB : b = d : y$

β) $DP : c = a : y$

aus diesen folgende zwei Gleichungen:

α) $PB \,.\, y = bd$

β) $DP \,.\, y = ac$

aus der Summe dieser beiden Gleichungen aber:

$(PB + DP)\, y = ac + bd$, oder

2) $x \,.\, y = ac + bd.$

Man versuche die in diesem Zusatze durch Buchstabengrößen ausgedrückten Sätze mit Worten auszusprechen.

IV) Aus den so eben gefundenen zwei Gleichungen

$$1)\ x : y = (ab + cd) : (bc + ad)$$

$$2)\ x \,.\, y = ac + bd$$

kann man nun, wenn von einem im Kreise beschriebenen Viereck die vier Seiten gegeben sind, die Diagonalen desselben bestimmen.

Man findet nämlich nach gehöriger Auflösung:

$$x = \sqrt{\frac{(ac+bd)\ (ab+cd)}{bc+ad}}$$

$$y = \sqrt{\frac{(ac+bd)\ (bc+ad)}{ab+cd.}}$$

V. Der Flächenraum Q eines im Kreise beschriebenen Vierecks ABCD ist

$$Q = \sqrt{(s-a)\ (s-b)\ (s-c)\ (s-d)}$$

wenn wir die bisher gebrauchten Bezeichnungen beibehalten, und $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ setzen.

Denn $ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$; drückt man den Flächenraum beider Dreiecke durch ihre drei Seiten aus, addirt beide Ausdrücke und reducirt gehörig, so wird man obigen Ausdruck finden.

§. 197.

Aufgabe. Den Flächenraum eines Trapezes aus seinen vier Seiten zu bestimmen.

Auflösung. Es sey ABCD (Fig. 118) das zu bestimmende Trapez, und zwar sey $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$. Zieht man $CE \perp AB$ und $OC \parallel AD$, so ist CE sowohl die Höhe des Dreiecks BCO als auch des Parallelogramms AOCD.

Um nun den Flächenraum des Dreiecks BCO durch seine Seiten auszudrücken, bestimme man die Seite OB; nämlich $OB = AB - AO = a - c$ und setze der Kürze wegen $a - c = q$; auch bemerke man, daß $OC = d$ ist, so ist

$$\triangle BOC = \tfrac{1}{4}\sqrt{(b+d+q)(d+q-b)(b+q-d)(b+d-q)}$$

Parallelogramm $AOCD = AO.CE$

$$= \frac{c}{2q}\sqrt{(b+d+q)(d+q-b)(b+q-d)(b+d-q)}$$

Nun ist Trapez $ABCD = \triangle BOC +$ Parallelogramm $AOCD$, und weil noch

$$\frac{1}{4}+\frac{c}{2q}=\frac{q+2c}{4q}=\frac{a-c+2c}{4q}=\frac{a+c}{4q}\text{, so ist}$$

Trapez $ABCD$

$$\frac{a+c}{4q}\sqrt{(b+d+q)(d+q-b)(b+q-d)(b+d-q)}$$

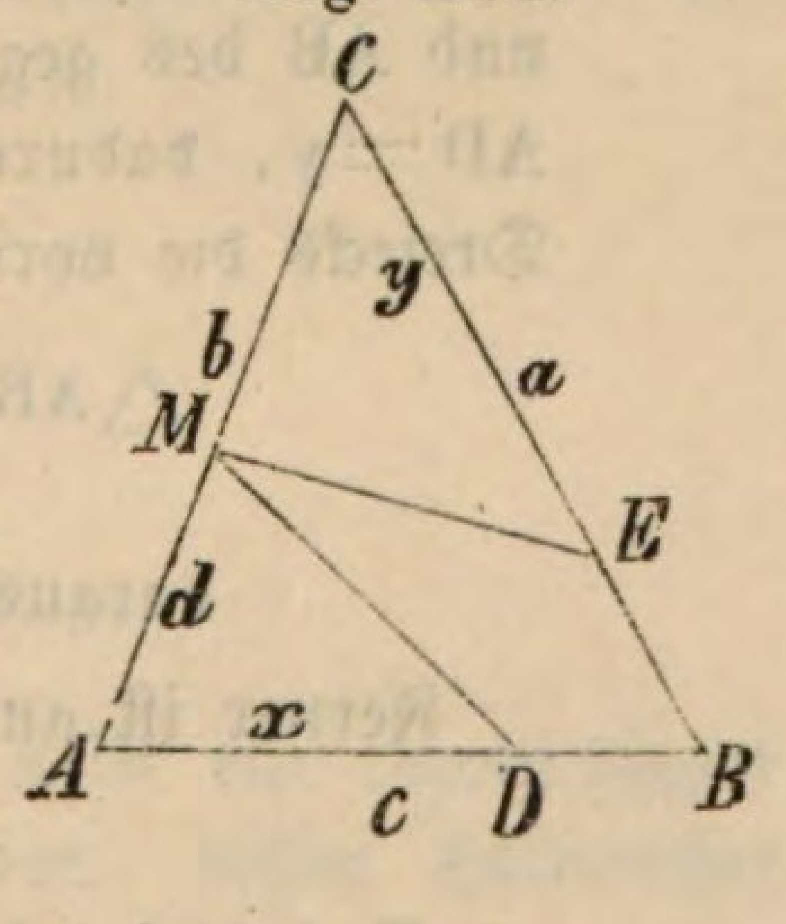
§. 198.

Aufgabe. Ein gegebenes Dreieck in zwei Theile, die ein gegebenes Verhältniß zu einander haben, so zu theilen, daß die Theilungslinie durch einen bestimmten Punkt geht, der entweder

1) in einer Dreiecksseite, oder
2) innerhalb, oder
3) außerhalb der Fläche des Dreiecks, liegt.

Auflösung. I. Theil. Es sey das Dreieck ABC (Fig. 202) in zwei Theile so zu theilen, daß das abgeschnittene Stück zum ganzen Dreieck sich verhalte $= n : m$; die Theilungslinie MD gehe durch den Punkt M in der Seite AC.

Fig. 202.



Man setze $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, und weil der Punkt M gegeben, so muß auch $AM = d$ gegeben seyn; da unbekannt ist, wo der Punkt D in AB liegt, so setze man $AD = x$.

Man hat jetzt $\triangle ABC : \triangle AMD = bc : dx$ (§. 103.)
Es ist aber $\triangle ABC : \triangle AMD = m : n$ (V. D. V.)

folglich $bc : dx = m : n$

$$x = \frac{nbc}{md}$$

Würde $x > c$ gefunden, so wäre dieses ein Zeichen, daß der Punkt D in die Verlängerung von AB fällt, also daß die theilende Linie die Seite BC schneiden würde.

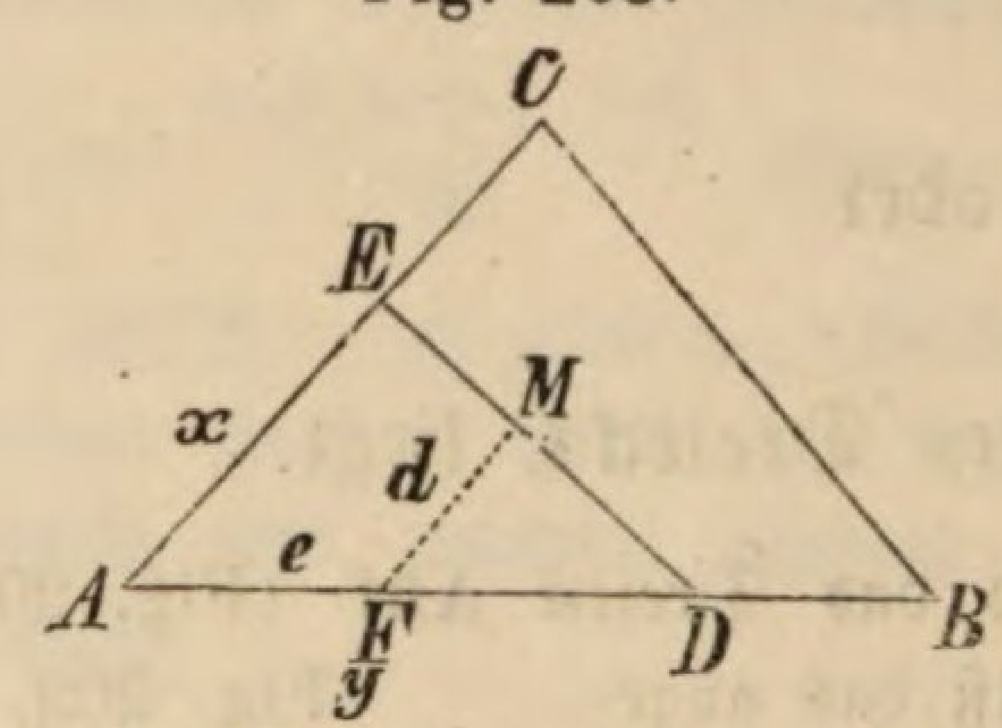
Wir wollen annehmen, dieses wäre der Fall und BC würde in einem Punkt, etwa in E geschnitten. Um die Lage dieses Punktes in BC zu bestimmen, setze man $CE = y$ und behalte die vorige Bezeichnung bei; so ist

$$\triangle ABC : \triangle MEC = ab : (b-d)\,y \quad (§. 103.)$$
oder $$\triangle ABC : (\triangle ABC - \triangle MEC) = ab : (ab - (b-d)\,y)$$
d. h. $$= ABC : AMEB = ab : (ab - (b-d)\,y)$$
Es ist aber auch $$\triangle ABC : AMEB = m : n$$

folglich $$ab : (ab - (b-d)\,y) = m : n$$
$$nab = mab - m\,(b-d)\,y$$
$$y = \frac{(m-n)\;ab}{m\;(b-d)}$$

Auflösung. II. Theil. Der Punkt M liege innerhalb der Fläche des Dreiecks ABC (Fig. 203). Zieht man MF || AB, so ist, weil die Lage des Punktes M bekannt, ebenfalls $MF = d$ und $AF = e$ bekannt; angenommen die Gerade DE durch M sey die gesuchte theilende Linie, so setze man, da unbekannt, in welchen Punkten die Seiten AC und AB des gegebenen Dreiecks getroffen werden, $AE = x$ und $AD = y$, dadurch wird, wenn man für die drei Seiten des Dreiecks die vorige Bezeichnung beibehält:

Fig. 203.

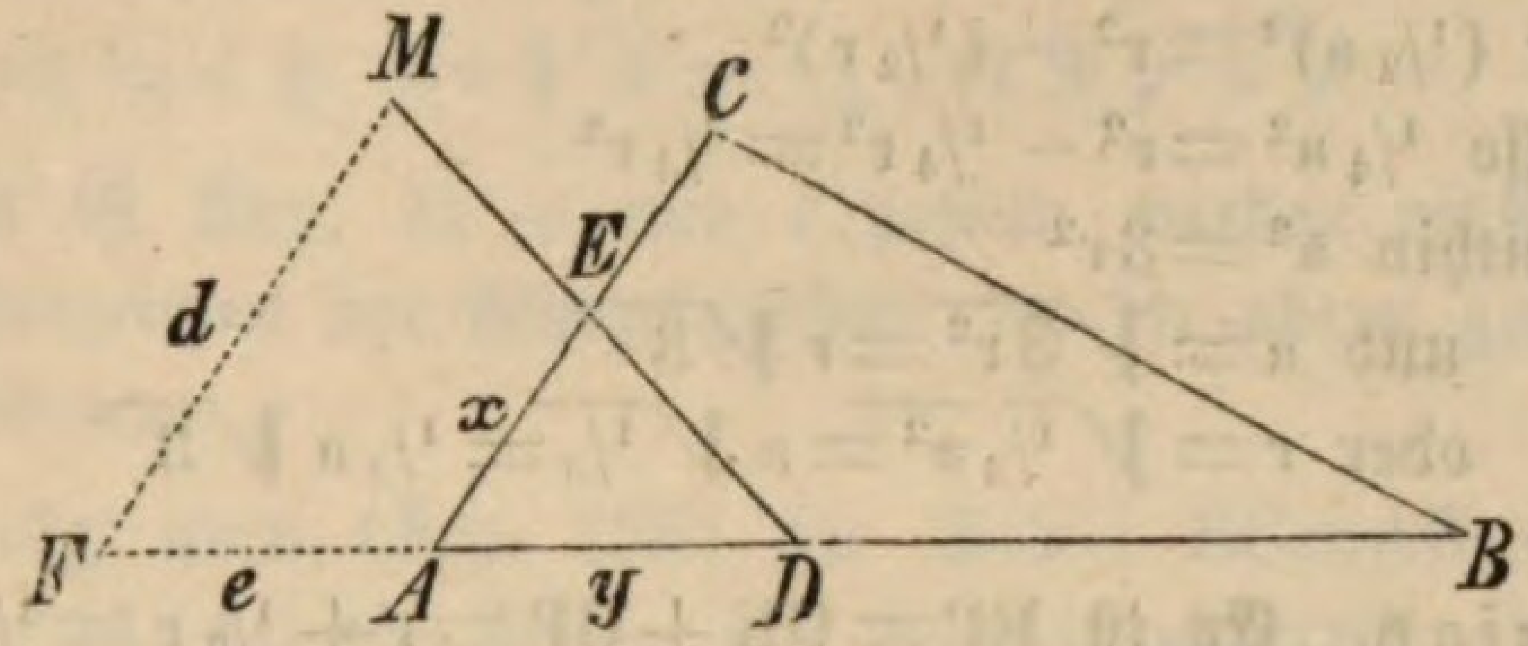


$$\triangle ABC : \triangle ADE = bc : xy \quad (§. 103.)$$
$$= m : n \quad (\text{V. D. B.})$$
daraus I) $$bc : xy = m : n$$
Ferner ist auch II) $$x : y = MF : FD$$
$$= d : (y-e)$$

Aus diesen beiden Proportionen ergibt sich
$$x = \frac{nbc \pm \sqrt{nbc\;(nbc - 4\,dem)}}{2\,em}$$

Auflösung. III. Theil. Der Punkt M liege außerhalb der Fläche des Dreiecks ABC (Fig. 204.)

Fig. 204.



Es sey MD die gesuchte theilende Linie, so setze man $AE = x$ und $AD = y$, und weil die Lage des Punktes M gegeben, so ist, wenn $MF \parallel AC$ gezogen, sowohl $MF = d$, als auch $FA = e$ bekannt. Gilt die obige Bezeichnung für die Dreiecksseiten, so ist

$$\triangle ABC : \triangle ADE = bc : xy = m : n$$

Auch ist $x : y = FM : FD = d : (e + y)$;

hieraus ergibt sich

$$\text{I)}\ mxy = nbc$$

$$\text{II)}\ dy = ex + xy$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man

$$x = \frac{-nbc \pm \sqrt{nbc\,(nbc + 4\,dem)}}{2\,em}$$

§. 199.

Aufgabe. Die Beziehung zu finden, in welcher der Halbmesser des Kreises zur Seite des einbeschriebenen regelmäßigen

1) Dreiecks,
2) Vierecks,
3) Zehnecks und Fünfecks

steht.

Auflösung. I. Theil. Es sey (Fig. 183) ACE ein regelmäßiges Dreieck, welches dem Kreis einbeschrieben, dessen Halbmesser $AO = r$ ist.

Halbirt man arc. AC in B und zieht OB und AB, so ist $AB = r =$ der Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks (§. 166); mithin $\triangle AOB$ gleichseitig und $OP = PB = \frac{1}{2}r$; setzt man die regelmäßige Dreiecksseite $AC = a$, so ist $AP = \frac{1}{2}a$ und man erhält

$$AP^2 = AO^2 - OP^2 \text{ (§. 110.)}$$
$$\text{oder } (\tfrac{1}{2}a)^2 = r^2 - (\tfrac{1}{2}r)^2$$
$$\text{also } \tfrac{1}{4}a^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}r^2 = \tfrac{3}{4}r^2$$
$$\text{mithin } a^2 = 3r^2$$
$$\text{und } a = \sqrt{3r^2} = r\sqrt{3}$$
$$\text{oder } r = \sqrt{\tfrac{1}{3}a^2} = a\sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{1}{3}a\sqrt{3}$$

Zusatz. Es ist $EP = OE + OP = r + \tfrac{1}{2}r = \tfrac{3}{2}r$ gleich der Höhe des im Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Dreiecks. Setzt man für r den eben gefundenen Werth $\tfrac{1}{3}a\sqrt{3}$, so erhält man die Höhe durch die Seite des Dreiecks ausgedrückt, nämlich $EP = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3}$. Daher der Flächenraum des regelmäßigen Dreiecks $= \tfrac{1}{2}a \cdot \tfrac{1}{2}a\sqrt{3} = \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3}$, wie §. 196.

Oder, wenn man in diesem letzten Ausdruck statt a^2 den oben gefundenen Werth $3r^2$ substituirt, so ist der Flächenraum des regelmäßigen Dreiecks $= \tfrac{3}{4}r^2\sqrt{3}$, und mithin durch den Halbmesser des umschriebenen Kreises ausgedrückt.

Auflösung. II. Theil. Bezeichnet man (Fig. 184) den Halbmesser des Kreises AO durch r, die Seite AB des diesem Kreise einbeschriebenen Quadrats durch b, so ist, weil bei O rechte Winkel,

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$
$$\text{oder } b^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$$
$$\text{daher } b = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$$
$$\text{und } r = \sqrt{\tfrac{1}{2}b^2} = b\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}b\sqrt{2}.$$

Zusatz. Der Flächenraum eines in einem Kreise vom Halbmesser r einbeschriebenen Quadrats ist also $r\sqrt{2} \cdot r\sqrt{2} = 2r^2 =$ dem zweifachen Quadrate des Halbmessers.

Auflösung. III. Theil. Es sey (Fig. 185) $AB = c =$ der Seite des regelmäßigen Zehnecks, der Halbmesser AO des umschriebenen Kreises $= r$.

Vermöge der Bedingung (§. 168.) ist

$$AE : OE = OE : AO, \text{ oder}$$
$$AE : AB = AB : AO, \text{ d. h.}$$
$$(r - c) : c = c : r, \text{ daraus}$$
$$c^2 = r^2 - rc$$

Wird diese Gleichung nach c aufgelöst, so ist

$$c = -\tfrac{1}{2}r \pm \tfrac{1}{2}r\sqrt{5} = \tfrac{1}{2}r(-1 \pm \sqrt{5})$$

oder nach r aufgelöst, gibt

$$r = \frac{1}{2} c \pm \frac{1}{2} c \sqrt{5} = \frac{1}{2} c (1 \pm \sqrt{5})$$

Es ist klar, da c und r positiv werden müssen, daß von den Vorzeichen der Wurzelgrößen nur die obern genommen werden dürfen.

Trägt man (Fig. 185) die Sehne $BC = AB$ ein und zieht AC so ist AC die Seite, des demselben Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Fünfecks.

Bezeichnet man $AC = d$, $BF = x$, und bemerkt, daß $AF = \frac{1}{2} d$, $OF = r - x$ und $AB = c =$ der Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Zehnecks, so ist in den beiden rechtwinkeligen Dreiecken AOF und ABF

$$\text{I)}\ AF^2 = AO^2 - OF^2$$
$$\text{II)}\ AF^2 = AB^2 - BF^2$$

Oder, wenn man die so eben angegebene Bezeichnung einführt:

$$\text{I)}\ \frac{1}{4} d^2 = r^2 - (r - x)^2$$
$$\text{II)}\ \frac{1}{4} d^2 = c^2 - x^2$$

daraus folgt sogleich

$$c^2 - x^2 = r^2 - (r - x)^2, \text{ oder}$$
$$c^2 - x^2 = r^2 - r^2 + 2rx - x^2 \text{ nämlich}$$
$$x = \frac{c^2}{2r}$$

Setzt man diesen Werth von x in die zweite Gleichung, und erinnert sich, daß nach oben $c^2 = r^2 - rc$ ist, so hat man

$$\frac{1}{4} d^2 = r^2 - rc - \left(\frac{c^2}{2r}\right)^2$$
$$= r^2 - rc - \frac{1}{4} r^2 + \frac{1}{2} rc - \frac{1}{4} c^2$$
$$d^2 = 3r^2 - 2rc - c^2$$
$$= r^2 + 2(r^2 - rc) - c^2$$
$$= r^2 + 2c^2 - c^2$$

$= r^2 + c^2$, nämlich man erhält auf diese Weise den oben §. 70 erwiesenen Lehrsatz.

Um aber die Seite des Fünfecks (d) bloß durch den Halbmesser (r) des umschriebenen Kreises ausgedrückt zu erhalten, setze man in die so eben gefundene Endgleichung.

$$d^2 = r^2 + c^2$$

den Werth für $c^2 = \left[\frac{1}{2} r (-1 + \sqrt{5})\right]^2$; so wird

$$d^2 = r^2 + \left[\frac{1}{2} r (-1 + \sqrt{5})\right]^2, \text{ oder}$$

$$d^2 = r^2 + \tfrac{3}{2} r^2 - \tfrac{1}{2} r^2 \sqrt{5}$$
$$= \frac{5r^2 - r^2\sqrt{5}}{2} = \frac{r^2(5-\sqrt{5})}{2},$$
$$\text{also } d = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

Wäre aber die Seite (d) des Fünfecks gegeben, und man sollte den Halbmesser (r) des umschriebenen Kreises finden, so hat man:

$$r^2 = \frac{2d^2}{5-\sqrt{5}} = \frac{2d^2(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}$$
$$= \frac{2d^2(5+\sqrt{5})}{20} = \frac{d^2(5+\sqrt{5})}{10}, \text{ und}$$
$$r = d\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

Beispiele. 1) Wie groß ist der Flächenraum eines regelmäßigen Dreiecks, wenn der Halbmesser des umschriebenen Kreises 5′ 6″ ist?

2) Der Halbmesser eines Kreises ist 10′, wie groß ist
a) die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Dreiecks,
b) die des einbeschriebenen Quadrats,
c) die des einbeschriebenen regelmäßigen Zehnecks und die des einbeschriebenen regelmäßigen Fünfecks?

3) Wie groß sind die Halbmesser derjenigen Kreise, welche um ein regelmäßiges Dreieck, Viereck, Fünfeck, Zehneck beschrieben sind, wenn die Seite einer jeden dieser regelmäßigen Figuren = 5′ 7″ 8‴ ist?

§. 200.

Aufgabe. An zwei Kreise, die ihrer Größe und Lage nach gegeben sind, eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Auflösung. Es sey (Fig. 193) die bekannte Centrale Cc = a und die beiden bekannten Halbmesser CM, cN seyen = R, r. Denkt man sich die Tangente MN, deren Berührungspunkte M, N sind, schon gezogen und verlängert, bis die verlängerte Centrale Cc in A getroffen ist, und setzt das unbekannte Stück derselben cA = x, so hat man, weil △CMA ∾ △cNA

$$CM : CN = CA : cA, \text{ oder}$$
$$R : r = (a + x) : x, \text{ daraus}$$
$$Rx = ar + rx, \text{ oder}$$
$$x = \frac{ar}{R - r} = cA$$

Wird nun dieser Ausdruck construirt, die dadurch erhaltene cA von c aus auf die verlängerte Centrale abgetragen, so erhält man den Durchschnittspunkt A der gesuchten Tangente mit der Centrale; zieht man nun von A aus an einen der beiden gegebenen Kreise eine Tangente, so ist diese zugleich eine Tangente für den andern Kreis.

Die Endgleichung $x = \frac{ar}{R - r}$ gibt uns auch noch zu erkennen, daß, wenn man $R = r$ setzt, $x = \frac{ar}{0}$ d. h. unendlich groß wird; nämlich der Durchschnittspunkt A fällt in eine unendliche Entfernung hinaus, oder die Tangente läuft mit der Centrale parallel, wie es in diesem Fall, wenn die Halbmesser der beiden gegebenen Kreise gleich sind, seyn muß.

Soll aber die gesuchte Tangente die Centrale nicht in ihrer Verlängerung, sondern sie selbst, also zwischen C und c, schneiden, so sey B dieser Durchschnittspunkt. Setzt man nun das unbekannte Stück $CB = y$, so hat man, wenn man sich die verlangte Tangente MT gezogen denkt, aus der Aehnlichkeit der △△ CMB und CTB

$$CM : CB = CT : BC, \text{ oder}$$
$$R : x = r : (a - x,) \text{ und daraus}$$
$$x = \frac{aR}{R + r} = CB.$$

Wird $R = r$, so ist $x = \frac{1}{2}a$ d. h. sind die Halbmesser der beiden gegebenen Kreise einander gleich, so schneidet die an diese Kreise gemeinschaftlich gezogene Tangente die Centrale in ihrer Mitte.

Ist $R + r = a$, so ist $x = R$. Wie ist dieses zu verstehen?

Zusatz. Die Durchschnittspunkte A und B in der Centrale heißen Aehnlichkeitspunkte, und haben noch ganz besondere Eigenschaften, von welchen wir hier nur einige in Kürze berühren wollen, die Beweise werden dem Fleiße und Nachdenken des Anfängers überlassen.

1) Wenn man in zweien Kreisen zwei parallele Halbmesser zieht und ihre Endpunkte durch eine gerade Linie verbindet, so wird die Centrale in einem Aehnlichkeitspunkt geschnitten.

2) Zwei Kreise haben nur zwei Aehnlichkeitspunkte, einen äußern und einen innern. Liegen die beiden parallelen Halbmesser auf einer Seite der Centrale, so entsteht der äußere Aehnlichkeitspunkt; liegen aber diese Halbmesser auf verschiedenen Seiten der Centrale, so ergibt sich der innere Aehnlichkeitspunkt.

3) Der Berührungspunkt zweier sich von außen berührender Kreise ist zugleich ihr innerer Aehnlichkeitspunkt.

4) Wird durch einen Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise eine gerade Linie gelegt, so heißt diese die Aehnlichkeitslinie dieser beiden Kreise und man unterscheidet auch innere und äußere Aehnlichkeitslinie, je nachdem diese durch den innern und äußern Aehnlichkeitspunkt gezogen ist.

5) Jede Aehnlichkeitslinie zweier Kreise liegt ganz außerhalb des einen Kreises, wenn sie auch außerhalb des andern liegt; sie berührt den einen Kreis, wenn sie den andern berührt; sie schneidet den einen Kreis, wenn sie den andern schneidet.

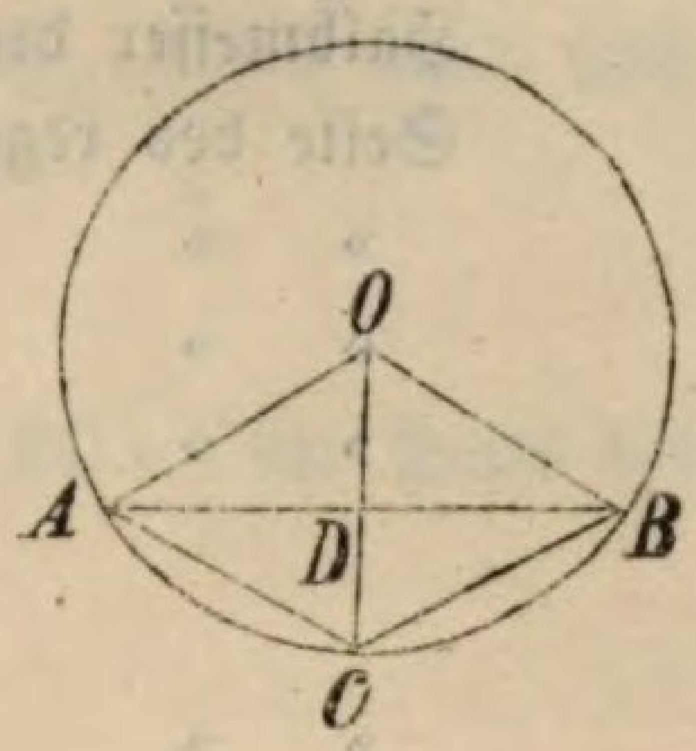
6) Werden von den Mittelpunkten zweier Kreise zwei Parallelen bis an eine Aehnlichkeitslinie gezogen, so verhalten sich diese zwei Parallelen wie die Halbmesser der Kreise, aus deren Mittelpunkten sie gezogen sind.

B. Berechnung des Kreises.

§. 201.

Aufgabe. Es ist der Halbmesser des Kreises und die Seite des einbeschriebenen n Ecks gegeben: man soll die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen 2 n Ecks finden.

Fig. 205.



Auflösung. Es sey (Fig. 205) der gegebene Halbmesser $AO = r$, die Seite AB des gegebenen regelmäßigen nEcks $= m$; der Halbmesser OC gehe durch die Mitte von AB, so ist BC die Seite des regelmäßigen 2nEcks und BC sey $= x$.

Um nun BC zu bestimmen, hat man

$$BC^2 = DC^2 + DB^2, \text{ oder}$$

$$x^2 = DC^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2$$

Es ist aber $DC = OC - OD = r - OD = r - \sqrt{OB^2 - DB^2}$ $= r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2}$; also $DC^2 = \left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2}\right)^2$ $= 2r^2 - {}^1\!/_4 m^2 - 2r\sqrt{r^2 - {}^1\!/_4 m^2}$.

Substituirt man diesen Werth in der obigen Gleichung für x^2, so erhält man

$$x^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - {}^1\!/_4 m^2}, \text{ und daraus}$$

$$x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - m^2}} \quad . \; . \; . \; A)$$

Zusatz 1. Oben (§. 199) haben wir die Seite des im Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Dreiecks $= r\sqrt{3}$ gefunden; setzen wir nun in die Gleichung A.) $m = r\sqrt{3}$, so werden wir die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks erhalten müssen, nämlich

$$x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - (r\sqrt{3})^2}} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{r^2}} = r$$

Ebenso: setzt man in der Gleichung A.) $m = r$, so erhält man einen Ausdruck für die Seite des dem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Zwölfecks, nämlich

$$x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - r^2}}$$
$$= \sqrt{2r^2 - r\sqrt{3r^2}}$$
$$= r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Würde man wieder $m = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ setzen, so erhielte man einen Ausdruck für die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Vierundzwanzigecks u. s. w.

Auf diese Art hat man nun die Seite des regelmäßigen einbeschriebenen Zwölfecks, Vierundzwanzigecks, Achtundvierzigecks

u. s. w. wirklich berechnet und gefunden, daß, wenn man den Halbmesser des umschriebenen Kreises = 1 setzt, die

Seite des regelmäßigen			12 Ecks	=	0,517638283398...
»	»	»	24 »	=	0,261052384440...
»	»	»	48 »	=	0,130806258460...
»	»	»	96 »	=	0,065438165643..
			.		.
			.		.
»	»	»	12288 »	=	0,000511326928...

ist.

Zusatz 2. Um die Seite des regelmäßigen einbeschriebenen Achtecks zu finden, wird in Gleichung A.) $m = r\sqrt{2}$ gesetzt (§. 199); man erhält

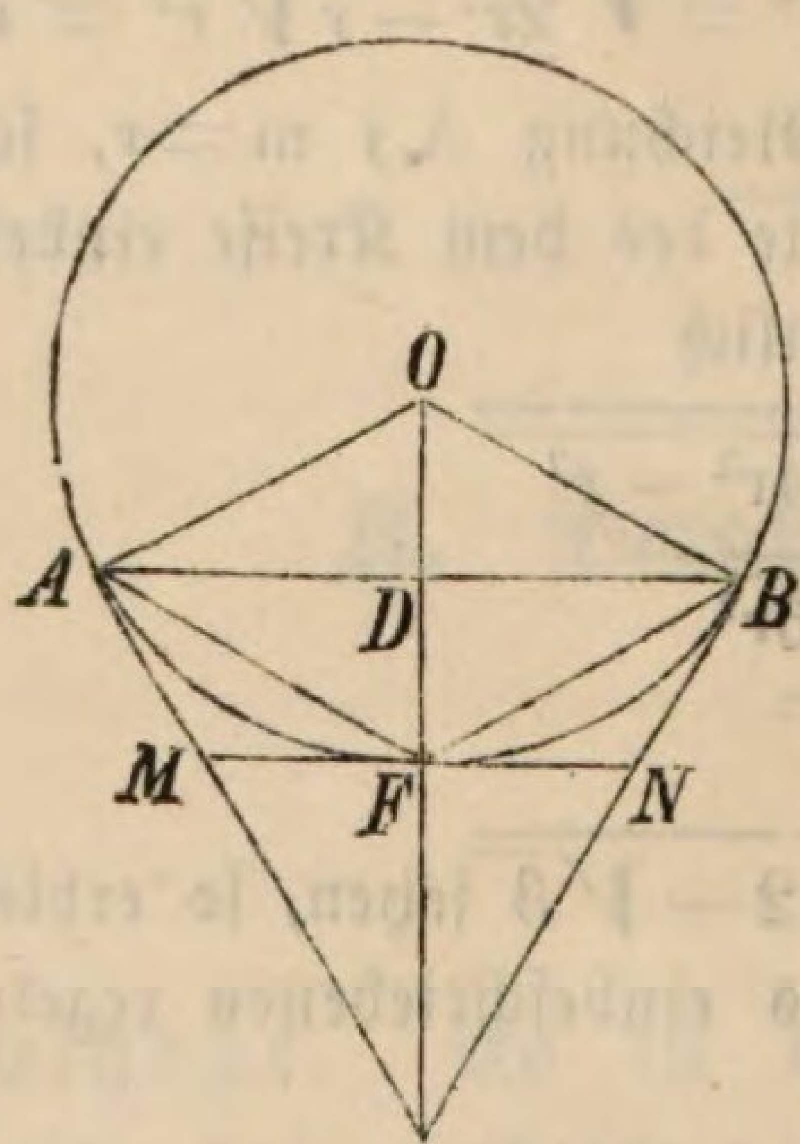
$$x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - 2r^2}}$$

$$= \sqrt{2r^2 - r\sqrt{2r^2}} = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{2}} = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

§. 202.

Aufgabe. Es ist der Halbmesser des Kreises und die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen n Ecks gegeben; man soll die Seite des umschriebenen ähnlichen n Ecks bestimmen.

Fig. 206.



Auflösung. Es sey (Fig. 206) der Halbmesser AO = r; AB = m = der gegebenen Seite des einbeschriebenen regelmäßigen n Ecks; wird BC ⊥ OB errichtet und durch OC, welche durch die Mitte D von AB geht, im Punkt C geschnitten, so ist BC die halbe Seite des umschriebenen ähnlichen n Ecks. (§. 164.)

Weil nun $\angle ODB = \angle OBC$ und $\angle DOB = \angle BOC$, so ist $\triangle ODB \sim \triangle OBC$, daher

$$OD : DB = OB : BC$$

Es ist aber $DB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} m$ und
$OD = \sqrt{BO^2 - DB^2} = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} m^2}$, folglich, wenn man noch BC durch $\frac{1}{2} x$ bezeichnet

$\sqrt{r^2 - \frac{1}{4} m^2} : \frac{1}{2} m = r : \frac{1}{2} x$, daraus

$$x = \frac{m r}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4} m^2}} = \frac{2 m r}{\sqrt{4r^2 - m^2}} = 2 BC = \text{der Seite des}$$

umschriebenen ähnlichen Vielecks.

Zusatz 1. Wir fanden oben (§. 199) die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Dreiecks $= r \sqrt{3}$. Setzt man in dem eben gefundenen Ausdruck $r \sqrt{3} = m$, so hat man

$$x = \frac{2r^2 \sqrt{3}}{\sqrt{4 r^2 - 3 r^2}} = 2r \sqrt{3} = \text{der Seite des dem-}$$

selben Kreis umschriebenen regelmäßigen Dreiecks, welche also noch einmal so groß als die Seite des einbeschriebenen ähnlichen Dreiecks ist.

Zusatz 2. Die Seite des eingeschriebenen Quadrats $= r \sqrt{2}$ (§. 199); wird $m = r \sqrt{2}$ gesetzt, so wird

$$x = \frac{2r^2 \sqrt{2}}{\sqrt{4r^2 - 2r^2}} = \frac{2r^2 \sqrt{2}}{r \sqrt{2}} = 2r$$

d. h. die Seite des einem Kreise umschriebenen Quadrats ist dem Durchmesser des Kreises gleich.

Zusatz 3. Wird $m = r =$ der Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks gesetzt, so erhält man

$$x = \frac{2 r^2}{\sqrt{4 r^2 - r^2}} = \frac{2 r^2}{r \sqrt{3}} = \frac{2 r}{\sqrt{3}} = \frac{2 r \sqrt{3}}{3}$$

die Seite des umschriebenen ähnlichen Sechsecks.

Zusatz 4. Setzt man in der gefundenen Formel nach und nach für m die in §. 201. Z. 1 berechneten Zahlenwerthe der Seiten des einbeschriebenen regelmäßigen 12, 24, 48, 96 . . . 12288 Ecks, so ergeben sich die Werthe für die Seiten der umschriebenen ähnlichen Vielecke, nämlich es wird, wenn der Halbmesser des Kreises $= 1$ ist, die Seite des umschriebenen regelmäßigen 12 Ecks $= 0{,}5358981\ldots$

24 » $= 0{,}2633099\ldots$

48 » $= 0{,}13108692\ldots$

96 Ecks = 0,0654732...

. . .

. . .

12288 » = 0,000511326930...

§. 203.

Aufgabe. Das Verhältniß der Peripherie eines Kreises zu seinem Durchmesser näherungsweise zu bestimmen.

Die Auflösung dieser Aufgabe beruht auf folgenden Sätzen:

1) Die Peripherie des Kreises ist offenbar grösser als der Umfang eines diesem Kreise einbeschriebenen und offenbar kleiner als der Umfang eines diesem Kreise umschriebenen nEcks.

2) Der Umfang eines dem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen 2nEcks ist größer als der Umfang des demselben Kreise einbeschriebenen regelmäßigen nEcks und der Umfang eines dem Kreise umschriebenen regelmäßigen 2nEcks ist kleiner als der Umfang des demselben Kreise umschriebenen regelmäßigen nEcks.

Denn ist AB die Seite eines dem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen nEcks (Fig. 206), so ist dessen Umfang $= n.AB$; wird AB durch OF halbirt, so ist jetzt BF die Seite des einbeschriebenen 2nEcks, dessen Umfang durch $2n.BF$ ausgedrückt ist. Nun ist aber $BF + AF > AB$ oder $2BF > AB$, also auch $2n.BF > n.AB$.

Wird $BC \perp OB$ errichtet und durch die verlängerte OF (welche AB halbirt) im Punkt C geschnitten, so ist BC die halbe Seite des umschriebenen regelmäßigen nEcks, und folglich dessen Umfang $= 2n.BC$; wird ferner $MN \perp OF$ gezogen und durch AC und BC in den Punkten M, N geschnitten, so ist MN die Seite des diesem Kreise umschriebenen regelmäßigen 2nEcks, dessen Umfang $= 2n.MN$.

Zieht man ON, so ist $\triangle OFN \cong \triangle OBN$ (§. 47. Z. 2), daher $NB = FN = MF$. Nun ist $CN > FN$ also auch $CN + NB > FN + MF$ oder $BC > MN$, daher auch $2n.BC > 2n.MN$.

3) Durch Verdoppeln der Anzahl der Seiten eines einbeschriebenen regelmäßigen nEcks können

also die Umfänge der einbeschriebenen Figuren vergrößert und dadurch der Peripherie des umschriebenen Kreises immer mehr genähert und eben so können die Umfänge der umschriebenen Figuren durch Verdoppeln der Anzahl der Seiten verkleinert und dadurch ebenfalls der Peripherie des einbeschriebenen Kreises immer mehr genähert werden.

4) Bezeichnen U, u die Umfänge des einem Kreise umschriebenen und einbeschriebenen regelmäßigen nEcks, so ist

$$U : u = OB : OD \text{ (§. 171. I.)}$$

$$\text{oder } (U - u) : u = (OB - OD) : OD$$

$$= (OF - OD) : OD$$

$$= \left(\frac{OF}{OD} - 1\right) : 1$$

$$\text{also } U - u = u \left(\frac{OF}{OD} - 1\right)$$

Würde die Anzahl der Seiten des einbeschriebenen n Ecks (also auch die Anzahl des ihm ähnlichen umschriebenen) immer größer, so wird OD ebenfalls immer größer (weil die Seiten — Sehnen — kleiner werden, also in größerer Entfernung vom Mittelpunkte liegen) und nähert sich mehr und mehr der Länge des Halbmessers OF als seiner Grenze. Würde bei einer unendlich großen Seitenanzahl diese Grenze wirklich erreicht, so wäre $\frac{OF}{OD} = \frac{OF}{OF} = 1$, also $\frac{OF}{OF} - 1 = 0$, mithin auch $U - u = o$, oder $U = u$.

Weil nun aber immer die Peripherie des Kreises, welche wir mii P bezeichnen wollen, kleiner als U und größer als u ist, so muß unter der Voraussetzung einer möglichst großen Seitenanzahl nahe $U = P = u$ seyn.

Die Peripherie des Kreises ist also die Grenze für den Umfang des größten einbeschriebenen und für den Umfang des kleinsten umschriebenen regelmäßigen Vielecks, und in diesem Sinne kann man sagen:

Der Kreis ist ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten.

5) Berechnet man nun wirklich für einen beliebig angenommenen Halbmesser den Umfang eines einbeschriebenen regelmäßigen Vielecks von einer möglichst großen Anzahl der Seiten in Zahlen, und auch den Umfang des ähnlichen umschriebenen Viel-

ecks, so erhält man jetzt die Länge der Peripherie des Kreises in Zahlen ausgedrückt für den nämlichen Halbmesser.

So fanden wir (§. 201. Z. 1) die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen 12288 Ecks $= 0{,}000511326928$, wenn der Halbmesser des umschriebenen Kreises $= 1$ gesetzt wurde; mithin ist der Umfang dieses Vielecks

$$u = 12288 \times 0{,}000511326928 = 6{,}283185291264 \ldots$$

Die Seite des umschriebenen 12288 Ecks für den Halbmesser $= 1$ wurde (§. 202. Z. 4) $= 0{,}000511326930 \ldots$ gefunden; daher ist der Umfang dieses Vielecks

$$U = 12288 \times 0{,}000511326930 \ldots = 6{,}28318531584 \ldots$$

Weil nun die Peripherie des Kreises $P < U$ und $P > u$, so müssen nothwendigerweise, da U und u in den sechs ersten Decimalstellen übereinstimmen, diese ersten sechs Decimalstellen ebenfalls der Peripherie des Kreises zugehören, und es ist demnach

$$P = 6{,}283185 \ldots$$

wenn der Halbmesser $r = 1$ gesetzt ist.

Oder $r : P = 1 : 6{,}283185 \ldots$

und $2r : P = 1 : 3{,}141592 \ldots$

d. h. $d : P = 1 : 3{,}141592 \ldots$

wenn wir für r und P die obige Bezeichnung beibehalten und den Durchmesser des Kreises unter d verstehen.

Zusatz. Die Zahl $3{,}141592 \ldots$ wird gewöhnlich mit π bezeichnet und dieser Buchstabe ausschließlich für sie gebraucht; auch heißt diese Zahl die Ludolphische, nach einem ihrer ersten Berechner Ludolph von Ceulen, aus Hildesheim gebürtig, der sie 1616 bis zu 32 Decimalstellen berechnete. Dieser fand nämlich: wenn man den Durchmesser des Kreises $= 1$ setzt, so ist

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950 \ldots$$

Wird die so eben angegebene Zahl π in einen Kettenbruch verwandelt, so ergeben sich folgende annähernde Werthe für dieselbe:

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102} \text{ u. s. w.}$$

Nämlich es ist $1 : \pi = 1 : 3$, oder

$= 7 : 22$, oder

$= 106 : 333$, oder

$= 113 : 355$, oder

$= 33102 : 103993$ etc.

Das zweite Verhältniß (7 : 22) ist unter dem Namen des Archimedischen bekannt und nur bis zur zweiten Decimalstelle noch richtig, denn $\frac{22}{7} = 3,142\ldots$ und also nur da anwendbar, wo es um große Genauigkeit der Rechnung nicht zu thun ist. Der Wahrheit ziemlich nahe ist schon das vierte Verhältniß, das Verhältniß des Metius genannt, welches in der sechsten Decimalstelle noch richtig ist: denn es ist $\frac{355}{133} = 3,1415929\ldots$ Dieses Verhältniß ist leicht dem Gedächtniß einzuprägen, da es aus den drei ersten ungeraden Zahlen, jede paarweise genommen (113/355), besteht und in den gewöhnlichen Fällen der Rechnung hinlänglich genau.

Obgleich der von Ludolph berechnete Werth von π einen Grad der Genauigkeit hat, welcher bei allen unsern anzustellenden Messungen nnd Berechnungen einer Kreisperipherie nicht vollständig zu benützen ist, so hat man doch, vorzüglich in neuerer Zeit, die Zahl π noch genauer bestimmt und Vega solche bis auf 140 Decimalstellen berechnet. Aus diesen Berechnungen geht nun hervor, daß das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie des Kreises nie absolut genau aber doch so genau bestimmt werden kann, als nur immer verlangt wird.

Zusatz 2. Aus den Proportionen

$$2r : P = 1 : \pi, \text{ und}$$
$$d : P = 1 : \pi$$
$$\text{folgt, daß } P = 2r\pi = d\pi$$

nämlich:

Man findet die Peripherie eines Kreises, wenn man den doppelten Halbmesser oder den Durchmesser mit der Ludolphischen Zahl multiplicirt.

Beispiel. Wie groß ist die Peripherie eines Kreises, dessen Halbmesser $= 3' 5'' 6'''$, und wie groß ist dieselbe, wenn der Durchmesser $20' 8'' 9'''$ ist?

Zusatz 3. Aus der Gleichung

$$P = 2r\pi = d\pi$$

ergibt sich auch $r = \frac{P}{2\pi}$ und $d = \frac{P}{\pi}$

Ist demnach die Länge der Peripherie eines Kreises gegeben, so läßt sich nun auch aus dieser die Größe des dazu gehörigen Halbmessers und Durchmessers bestimmen.

Beispiel. 1) Die Peripherie eines Kreises ist 100'; wie groß ist der Durchmesser dieses Kreises?

2) Die Peripherien dreier Kreise seyen 20' 6'' 3''', 80' 7'' und 96' 5'''; wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Peripherie gleich der Summe dieser drei Peripherien ist?

Zusatz 4. Es bezeichnen r, r', d, d', P, P' die Halbmesser, Durchmesser und Peripherien zweier Kreise, nämlich es sey

$$P = 2r\pi = d\pi, \text{ und}$$
$$P' = 2r'\pi = d'\pi$$
$$\text{so ist auch } P : P' = 2r\pi : 2r'\pi = d\pi : d'\pi$$
$$= r : r' = d : d';$$

d. h. **die Peripherien zweier Kreise verhalten sich wie ihre Halbmesser oder wie ihre Durchmesser.**

Zusatz 5. Aus dem gegebenen Halbmesser eines Kreises läßt sich nun auch die Größe eines Bogens, dessen Centriwinkel bekannt ist, berechnen.

Es sey der zu einem Bogen α gehörige Centriwinkel $= \varphi^0$, so ist, wenn man die bisherige Bezeichnung beibehält,

$$P : \alpha = 360^0 : \varphi^0$$
$$\text{also } \alpha = P \frac{\varphi^0}{360^0}$$
$$= 2r\pi \frac{\varphi^0}{360^0},$$

wenn man für P den Werth $2r\pi$ setzt.

Zusatz 6. Umgekehrt läßt sich, wenn der Halbmesser des Kreises und die Länge eines Bogens α gegeben ist, der zu diesem Bogen gehörige Centriwinkel finden.

Denn aus

$$\alpha = 2r\pi \frac{\varphi^0}{360^0} \text{ folgt}$$
$$\varphi^0 = \frac{\alpha}{2r\pi} \cdot 360^0$$

Beispiel. 1) Der Halbmesser eines Kreises ist 9', wie groß ist der Centriwinkel eines Bogens, der 25' lang ist? (Oder,

was dasselbe ist, wie groß ist der Bogen in Graden, Minuten, Secunden u. s. w. ausgedrückt, der die Länge von 25′ hat?)

2) Der wievielste Theil der Peripherie ist der Bogen, welcher mit dem Durchmesser dieselbe Länge hat?

3) Wie lang ist ein Bogen, der 30° 24′ 36″ enthält, wenn der Durchmesser des dazu gehörigen Kreises 12′ ist?

§. 204.

Aufgabe. Aus dem gegebenen Halbmesser oder Durchmesser eines Kreises den Flächenraum desselben zu bestimmen.

Auflösung. Fallen die Umfänge des dem Kreise ein- und umbeschriebenen Unendlichecks mit der Peripherie des Kreises zusammen (§. 203), so müssen auch die Flächenräume dieser drei Figuren einander gleich seyn.

Um nun den Flächenraum eines solchen Unendlichecks zu bestimmen, nehme man das einbeschriebene und denke sich durch alle Ecken desselben Halbmesser gezogen, so wird dasselbe in eine unendlich große Anzahl gleicher Dreieckchen zerlegt, wovon jedes den Umfang u des Vielecks getheilt durch die Anzahl (welche hier ∞ ist) der Seiten, nämlich $\frac{u}{\infty}$ zur Grundlinie und den Halbmesser (r) des umschriebenen Kreises (denn DF$=$0 (Fig. 206; vergl. §. 203) zur Höhe hat. Es ist also der Flächenraum eines solchen Dreieckchens $= \frac{u}{\infty} \cdot \frac{r}{2}$; folglich der Flächenraum dieses Unendlichecks = dem Flächenraum eines solchen Dreieckchens multiplizirt mit der Anzahl ($= \infty$) der Seiten, also gleich

$$\frac{u}{\infty} \cdot \frac{r}{2} \cdot \infty = u \cdot \frac{r}{2} = u \cdot \frac{d}{4},$$ wenn d den Durchmesser vorstellt.

Weil nun auch in diesem Fall u$=$P (§. 203), wenn wir die Peripherie des Kreises mit P bezeichnen, so ist der Flächenraum Q des Kreises

$$Q = P \,.\, \frac{r}{2} = P \,.\, \frac{d}{4}$$

d. h. **der Flächenraum des Kreises ist gleich dem Produkt aus seiner Peripherie in den halben**

Halbmesser, oder in den vierten Theil des Durchmessers.

Oder, wenn man den obigen Ausdruck mit §. 101. Z. 6 vergleicht:

Der Flächenraum eines Kreises ist dem eines Dreieckes gleich, das die Länge der Peripherie des Kreises zur Grundlinie und den Halbmesser zur Höhe hat.

Wird (§. 203. Z. 3) $P = 2r\pi = d\pi$ gesetzt, so ist auch

$$Q = r^2\pi = \frac{1}{4} d^2\pi$$

nämlich:

Der Flächenraum eines Kreises ist gleich dem Produkt aus dem Quadrate des Halbmessers oder aus dem vierten Theil des Quadrates des Durchmessers in die Ludolphische Zahl.

Beispiele. 1) Wie groß ist der Flächenraum eines Kreises, dessen Halbmesser 20′ 8″ 5‴ ist?

2) Der Flächenraum eines Kreises ist 25 □′; wie groß ist der Durchmesser desselben?

Zusatz 1. Es bezeichnen Q, Q′; r, r′; d, d′ die Flächenräume, Halbmesser, Durchmesser zweier verschiedener Kreise, so ist:

$$Q = r^2\pi = \frac{1}{4} d^2\pi$$

$$\text{und } Q' = r'^2\pi = \frac{1}{4} d'^2\pi,$$

$$\text{daher } Q : Q' = r^2\pi : r'^2\pi = \frac{1}{4} d^2\pi : \frac{1}{4} d'^2\pi$$

$$\text{oder } Q : Q' = r^2 : r'^2 = d^2 : d'^2$$

Die Flächenräume zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser oder wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Zusatz 2. Der Flächenraum eines Kreisausschnittes läßt sich nun auch aus dem gegebenen Halbmesser und aus dem gegebenen Centriwinkel bestimmen.

Bezeichnet φ^0 die Anzahl der Grade, Minuten und Secunden des Centriwinkels und folglich auch des Bogens des Ausschnittes, so verhält sich offenbar der Flächenraum des ganzen Kreises, zum Flächenraum des Ausschnittes $= 360^0 : \varphi^0$. Setzt

man den Flächenraum des ganzen Kreises = Q, den des Ausschnittes = q, so ist

$$Q : q = 360^0 : \varphi^0$$

$$\text{oder } r^2\pi : q = 360^0 : \varphi^0$$

$$\text{daraus } q = r^2\pi \frac{\varphi^0}{360^0}$$

Nun ist die Länge α des gegebenen Bogens $= 2r\pi \frac{\varphi^0}{360^0}$ (§. 203. Z. 5); und daraus $\frac{r}{2}\ \alpha = r^2\pi \frac{\varphi^0}{360^0}$; wird dieser Werth in dem so eben gefundenen Ausdruck für q substituirt, so ist

$$q = \frac{r}{2}\ \alpha,$$

d. h.

Der Flächenraum eines Kreisausschnittes ist gleich dem Flächenraume eines Dreiecks, das die Länge des Ausschnittsbogens zur Grundlinie und den Halbmesser des Kreises zur Höhe hat.

Beispiel. Wie groß ist der Flächenraum eines Kreisausschnittes, wenn der Halbmesser des Kreises = 7′ 6″ und der Winkel des Ausschnittes 24° 36′ 24″ ist?

Zusatz 3 Aus der Gleichung

$$q = r^2\pi \frac{\varphi^0}{360^0}$$

$$\text{folgt } r = \sqrt{\frac{q \cdot 360^0}{\pi \cdot \varphi^0}}$$

$$\text{und } \varphi^0 = \frac{q \cdot 360^0}{r^2 \cdot \pi}$$

Nämlich:

Aus dem gegebenen Flächeninhalt und Bogen eines Kreisausschnittes läßt sich der Halbmesser, und aus dem gegebenen Flächeninhalt des Ausschnittes und dem gegebenen Halbmesser des dazu gehörigen Kreises läßt sich auch der Bogen in Graden, Minuten ꝛc. ausgedrückt, finden.

Zusatz 4. Wird von dem Flächenraum eines Kreisausschnittes ACBO (Fig. 205) das Dreieck ABO subtrahirt, so erhält man den des Kreisabschnittes ABC, nämlich:

Segment ABC = Sektor ACBO — △ ABO.

Beispiele. 1) Wie groß ist der Flächenraum eines Kreisabschnittes, wenn der Halbmesser des Kreises = 24′ und der Bogen des Abschnittes 36° mißt?

2) Der Centriwinkel eines Kreisausschnittes ist 120°; wie groß ist der Flächenraum des dazu gehörigen Abschnittes, wenn die Peripherie des Kreises 100′ ist?

3) Ein Kreissegment habe zum Flächenraum 1□′; wie groß ist der Halbmesser des dazugehörigen Kreises, wenn die Sehne des Abschnittes gleich diesem Halbmesser ist?

Zusatz 5. Es sey ein Vieleck, dessen Umfang = U und dessen Flächeninhalt = Q von der Beschaffenheit, daß sich ein Kreis in dasselbe einschreiben lasse, der Halbmesser dieses Kreises = r, so ist $Q = \frac{1}{2} U r$.

Denn das Vieleck läßt sich vom Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises aus, in so viele Dreiecke zerlegen, als es selbst Seiten hat, und diese Seiten werden die Grundlinien dieser Dreiecke; jedes dieser Dreiecke hat den Halbmesser des einbeschriebenen Kreises zur Höhe; der Flächeninhalt eines dieser Dreiecke ist gleich dem halben Produkt aus der Grundlinie in den Halbmesser; folglich die Summe aller dieser Dreiecke oder der Flächenraum des Vielecks ist gleich dem halben Produkt aus allen Grundlinien in den Halbmesser, oder gleich dem Produkt aus dem halben Umfang des Vielecks in den Halbmesser des einbeschriebenen Kreises.

Setzt man Q, für den Flächeninhalt des Kreises, so ist

$$Q_{,} = r^2\pi$$

$$\text{daher } Q : Q_{,} = \tfrac{1}{2} Ur : r^2\pi$$

$$= U : 2r\pi$$

$$= U : P,$$

wenn P die Peripherie des Kreises bezeichnet.

Der Flächenraum eines Kreises verhält sich zum Flächenraum eines ihm umschriebenen Vielecks, wie die Peripherie des Kreises zum Umfang des umschriebenen Vielecks.

Zusatz 6. Bezeichnet $Q_{,,}$ den Flächenraum und $U_{,,}$ den Umfang eines andern demselben Kreise umschriebenen Vielecks, so ist ebenfalls

$$Q_{,,} = \tfrac{1}{2} U_{,,} r.$$

Läßt man die im vorigen Zusatz eingeführte Bezeichnung für das erste umschriebene Vieleck gelten,

$$\text{so ist } Q : Q_{,,} = \tfrac{1}{2} Ur : \tfrac{1}{2} U_{,,}r$$
$$= U : U_{,,}$$

d. h.

Die Flächenräume zweier um denselben Kreis beschriebener Vielecke verhalten sich wie ihre Umfänge.

§. 205.

Aufgabe. Es ist ein Vieleck, dem ein Kreis einbeschrieben ist, gegeben, ferner ein zweites Vieleck, das dem ersten ähnlich ist und mit dem Kreis gleichen Umfang hat; man soll das Verhältniß der Flächenräume dieser drei Figuren finden.

Auflösung. Es sey A ein Vieleck dessen Flächenraum mit Q und dessen Umfang mit U bezeichnet ist; in dieses Vieleck sey ein Kreis K einbeschrieben, dessen Flächenraum $Q_,$ und dessen Peripherie $U_,$ vorstellt, und endlich sey B ein dem A ähnliches Vieleck, dessen Flächenraum mit $Q_{,,}$ und dessen Umfang mit $U_{,,}$ bezeichnet seyn soll, auch soll $U_{,,} = U_,$ seyn.

Weil nun $A \backsim B$, so ist

$$Q : Q_{,,} = U^2 : U_{,,}^2$$

denn die Flächenräume ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate ähnlichliegender Seiten und ähnlichliegende Seiten sind dem Umfang proportionirt.

Es ist aber (V. D. B.) $U_{,,} = U_,$; daher ist auch

$$Q : Q_{,,} = U^2 : U_,^2$$

Nach (§. 204. Z. 5) ist $Q : Q_, = U : U_,$

dividirt man die erste Proportion durch die zweite, so wird

$$1 : \frac{Q_{,,}}{Q_,} = U : U_,$$

$$\text{oder } Q_, : Q_{,,} = U : U_, = Q : Q_,$$

$$\text{nämlich } Q_{,,} : Q_, = Q_, : Q$$

d. h.

Die Kreisfläche ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Flächenräumen zweier

ähnlicher Vielecke, von denen das eine dem Kreis umschrieben, das andere mit demselben von gleichem Umfange ist.

C. Einiges über größte und kleinste Werthe.

§. 206.

Die Untersuchung, unter welchen Bedingungen eine Größe unter allen ihr zugehörigen Werthen den größten Werth (Maximum) oder den kleinsten Werth (Minimum) habe, gehört in die höhere Analysis, allein es lassen sich einige hieher gehörige Aufgaben durch einfache Construction oder auch auf elementar-algebraischem Wege lösen und nur von diesen kann hier die Rede seyn.

Im Vorhergehenden wurden wir schon einigemal auf größte und kleinste Werthe geleitet. So fanden wir (§. 151. 3.) daß unter allen Sehnen, die in einem und demselben Kreise möglich sind, diejenige die größte, also ein Maximum ist, die durch den Mittelpunkt geht, mithin ein Durchmesser ist. So wurde (§. 54. I.) gefunden, daß die Senkrechte von einem gegebenen Punkte auf eine gegebene Gerade gefällt, unter allen Geraden, die von diesem Punkt auf diese Gerade gezogen werden können, die kleinste Gerade, also ein Minimum ist. So ergab sich (§. 157 3. 2), daß die Tangente AM‴ unter allen Geraden, die (Fig. 169) vom Punkt A aus an den concaven Bogen M‴ M gezogen ein Minimum, hingegen unter allen Geraden, die von A aus an den convexen Bogen NM‴ gezogen ein Maximum ist.

§. 207.

Behufs des Auffindens größter oder kleinster Werthe, bemerke man im Allgemeinen folgendes:

1) Der Werth einer Differenz ist ein Maximum, wenn bei unveränderlichem positiven Minuenden der positive Subtrahend seinen möglichst kleinsten Werth erreicht hat.

2) Der Werth einer Differenz ist ein Minimum, wenn bei unveränderlichem Minuenden der Subtrahend dem Minuenden gleich wird, vorausgesetzt, daß der Werth der Differenz nicht negativ werden soll.

3) Der Werth eines Produkts ist ein Maximum, wenn jeder Faktor seinen möglichst größten Werth erreicht hat.

4) Der Werth eines Produkts ist ein Minimum, wenn jeder Faktor den möglichst kleinsten Werth erreicht oder ein Faktor gleich Null wird.

5) Der Werth eines Produktes von gegebener Faktorensumme ist ein Maximum, wenn die einzelnen Faktoren einander gleich sind.

6) Der Werth eines Quotienten ist ein {Maximum, / Minimum,} wenn bei unveränderlichem Dividenden der Divisor den {kleinsten / größten} Werth, oder bei unveränderlichem Divisor der Dividend seinen {größten / kleinsten} Werth erreicht hat.

Die Richtigkeit dieser aufgestellten Sätze läßt sich leicht aus arithmetischen Gründen darthun; der unter 5 aufgeführte soll, weil die Gründe etwas entfernter liegen, hier bewiesen werden.

Es sey die Summe zweier Zahlen $= 2s$ und diese Zahlen selbst sollen durch x und y ausgedrückt seyn, so ist $\frac{x+y}{2} = s$. Angenommen x und y wären einander ungleich, es sey $x+m=y$, so ist auch

$$\frac{2x+m}{2} = s$$

$$\text{und } x^2 + mx + \tfrac{1}{4} m^2 = s^2$$

Es ist aber auch $x . y = x(x+m) = x^2 + mx$.

Vergleicht man nun die Werthe für s^2 und $x . y$, so ist offenbar, daß $s^2 > xy$ ist. Nun ist aber $s^2 = s . s =$ dem Produkt zweier gleicher Faktoren, deren Summe $= 2s$, hingegen $x . y =$ dem Produkt zweier ungleicher Factoren, deren Summe ebenfalls $= 2s$.

Daher ist das Produkt zweier Faktoren ein Maximum, wenn die beiden Faktoren, deren Summe gegeben ist, einander gleich sind.

Ferner sey die Summe dreier Zahlen $= 3s$, und diese Zahlen seyen x, y, z, so ist $\frac{x+y+z}{3} = s$; auch sey $y+m=x$ und $z+n=x$, so ist auch $\frac{3x+m+n}{3} = s$.

$$\text{und } \left(x + \frac{m+n}{3}\right)^3 = s^3$$

d. h. $x^3 + x^2(m+n) + \tfrac{1}{3} x (m+n)^2 + \tfrac{1}{27}(m+n)^3 = s^3$

Es ist aber auch $x(x+m)(z+n) = xyz$,

oder $x^3 + x^2(m+n) + x . mn = xyz$.

Nun ist aus bekannten Gründen

$$m^2 + n^2 > 2mn$$

$$\text{oder } (m+n)^2 > 4mn$$

$$\text{und auch } \tfrac{1}{3}(m+n)^2 > \tfrac{4}{3} mn$$

$$\text{daher } \tfrac{1}{3} x (m+n)^2 > xmn + \tfrac{1}{3} xmn$$

und um so mehr

$$\tfrac{1}{3} x (m+n)^2 + \tfrac{1}{27}(m+n)^3 > xmn,$$

deshalb $s^3 > xyz$.

Da nun s^3 das Produkt dreier gleicher Faktoren, xyz aber das Produkt dreier ungleicher Faktoren ist, auch $s+s+s = x+y+z = 3s$ ist, so folgt, daß **das Produkt dreier gleicher Faktoren, deren Summe gegeben, ein Maximum ist.**

Die Richtigkeit des Satzes läßt sich nun auch leicht auf 4, 5 . . Faktoren ausdehnen; wir begnügen uns mit diesem Beweis, als für unsern Zweck hinreichend und wollen von den oben aufgestellten Sätzen einige Anwendungen auf die Geometrie machen.

§. 208.

Aufgabe. Unter allen Rechtecken mit einem gegebenen Umfang dasjenige zu finden, das den größten Flächenraum einschließt.

Auflösung. Es sey der gegebene Umfang des Rechtecks $= 2u$, so ist der halbe $= u$. Soll nun der Flächenraum ein Maximum seyn, so muß u in zwei solche Theile zerlegt werden, daß deren Produkt ein Maximum ist. Dieses ist aber der Fall, wenn diese Theile einander gleich sind (§. 207. 5), nämlich wenn die beiden zusammenstoßenden Seiten des Rechtecks einander gleich sind, d. h. wenn die Figur ein Quadrat ist.

Unter allen isoperimetrischen Rechtecken schließt also das Quadrat den größten Flächenraum ein.

§. 209.

Aufgabe. Unter allen Dreiecken dasjenige zu bestimmen, dessen Flächenraum ein Maximum ist, wenn der Umfang und eine Seite gegeben ist.

Auflösung. Der gegebene Umfang sey $= 2s$, die gegebene Seite $= a$, die beiden unbekannten Seiten $= x, y$, so ist

$$a + x + y = 2s$$

bezeichnen wir den Flächeninhalt durch Q, so ist nach §. 196. III.

$$Q = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-x)\,(s-y)}$$

Der Flächenraum Q wird ein Maximum seyn, wenn das Produkt unter dem Wurzelzeichen ein Maximum ist. Die beiden ersten Faktoren s, $(s-a)$ sind unveränderliche Größen; es hängt der Maximalwerth des Produkts offenbar von den

beiden letzten Factoren $(s-x)$, $(s-y)$ ab. Das Product dieser beiden letzten Factoren ist aber ein Maximum, wenn sie gleich sind (§. 207. 5) d. h. wenn $x=y$, also wenn das gesuchte Dreieck gleichschenkelig ist.

Unter allen Dreiecken, von demselben Umfang und derselben Grundlinie ist das gleichschenkelige dasjenige, dessen Flächenraum ein Maximum ist.

Zusatz. Unter allen isoperimetrischen Vielecken von einer gleichen Anzahl der Seiten hat das gleichseitige den größten Flächenraum.

Denn es sey ABCDEF das größte Vieleck, das mit dessen Seiten gebildet werden kann. Wären nun Seiten ungleich, etwa $AB \gtrless BC$ und man zieht AC, so könnte jetzt über AC ein gleichschenkeliges Dreieck construirt werden, das mit $\triangle ABC$ gleichen Umfang hätte. Dieses gleichschenkelige Dreieck wäre aber größer als $\triangle ABC$, folglich ließe sich das Vieleck ABCDEF vergrößern, wäre mithin kein Maximum, daher kann AB nicht $\gtrless BC$ seyn. Dasselbe gilt von jedem zusammenstoßenden Seitenpaar, folglich das Vieleck ABCDEF, wenn dessen Flächeninhalt ein Größtes, gleichseitig.

§. 210.

Aufgabe. Unter allen Dreiecken dasjenige zu finden, dessen Flächenraum bei gegebenem Umfang ein Maximum ist.

Auflösung. Es sey der gegebene Umfang $=2s$, und x, y, z die drei unbekannten Seiten, so ist, wenn Q den Flächenraum bezeichnet:

$$Q = \sqrt{s\,(s-x)\,(s-y)\,(s-z)}.$$

Daß das Produkt unter dem Wurzelzeichen, also Q selbst, ein Maximum werde, hängt von den drei letzten Factoren ab; denn der erste Factor ist unveränderlich. Das Produkt der drei letzten Factoren ist aber ein Maximum, wenn diese Factoren einander gleich sind (§. 207. 5) nämlich, wenn $x=y=z$, also wenn das Dreieck gleichseitig ist.

Unter allen isoperimetrischen Dreiecken ist der Flächenraum des gleichseitigen ein Maximum.

§. 211.

Aufgabe. Unter allen Dreiecken dasjenige zu finden, dessen Flächenraum ein Maximum ist, wenn zwei Seiten desselben gegeben sind.

Auflösung. Die beiden gegebenen Seiten seyen AB und BC und diese unter einen beliebigen Winkel zusammengesetzt, auch AC so wie AD $\perp$ BC gezogen, so ist, wenn Q den Flächenraum des Dreiecks ABC bezeichnet:

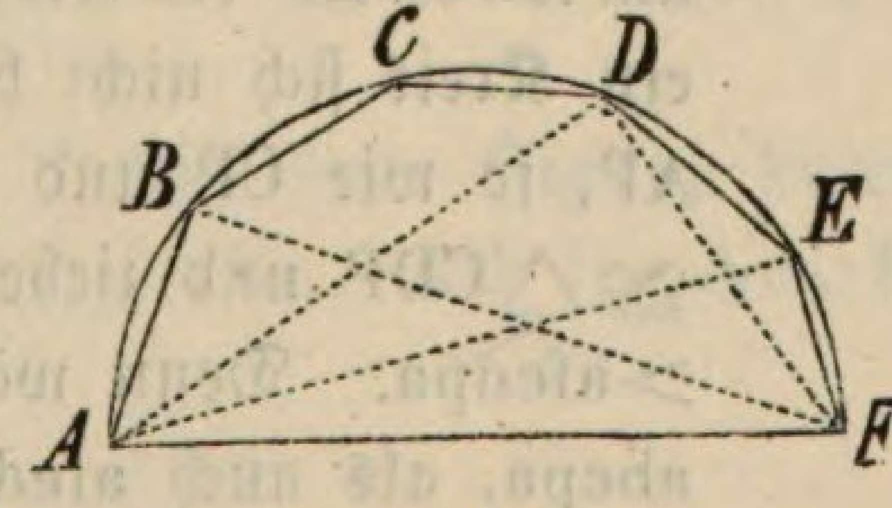
$$Q = \frac{BC}{2} \cdot AD.$$

Es wird aber Q den größten Werth erhalten, wenn AD am größten ist; denn BC ist unveränderlich. Nun ist $AD^2 = AB^2 - BD^2$. Die Senkrechte AD hat aber den größten Werth, wenn BD = 0 ist; denn AB ist unveränderlich. Q wird demnach immer größer, je kleiner BD wird, und Q ist am größten, wenn der Punkt D in B fällt, d. h. wenn AB $\perp$ BC. ist.

Der Flächenraum eines Dreiecks, das zwei gegebene Seiten hat, ist ein Maximum, wenn diese gegebenen Seiten senkrecht aufeinander stehen.

Zusatz 1. Ein nEck, von welchem (n — 1) Seiten gegeben, wird ein Maximum, wenn man zur nten Seite den Durchmesser eines Halbkreises nimmt, in welchem die übrigen Seiten als Sehnen eingetragen wurden.

Fig. 207.



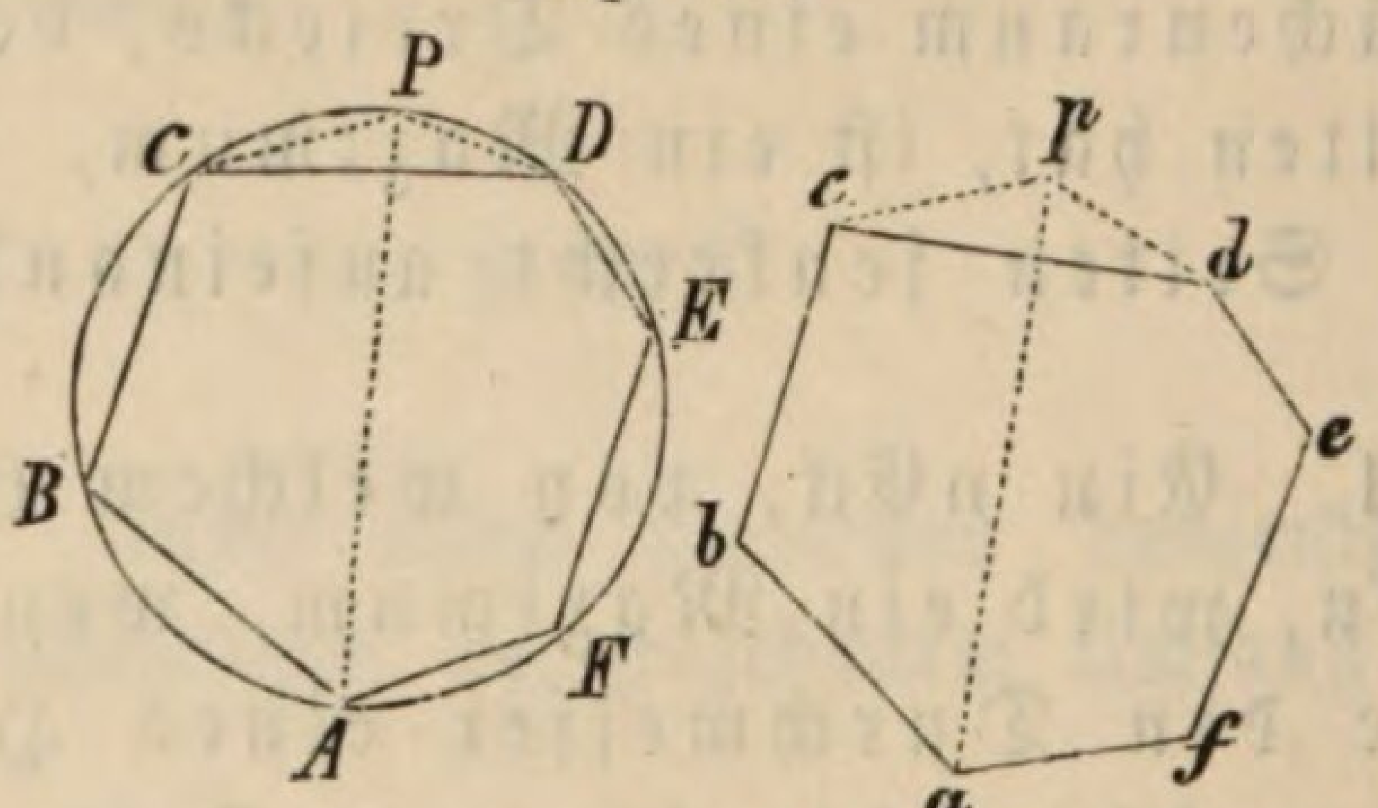
Es sey ABCDEF ein Vieleck, und zwar sey (Fig. 207) der Flächenraum desselben ein Maximum. Zieht man die Diagonalen BF, AE, DF und nimmt BFEDC als unveränderlich an, so muß $\angle$ ABF = R seyn; denn wäre ABF $\gtrless$ R, so könnte $\triangle$ABF vergrößert also auch ABCDEF vergrößert werden, mithin wäre gegen die Vor-

aussetzung ABCDEF kein Maximum. Dieselben Gründe zeigen, daß $\angle$ AEF = R seyn muß, oder daß B, E Punkte in der Peripherie eines Kreises sind, dessen Durchmesser AF (§. 60. Z. 1). Wird ADCB, so wie $\triangle$DEF als unveränderlich angenommen, so muß $\angle$ ADF = R seyn, wenn ABCDEF ein Maximum seyn soll; daher ist der Punkt D ebenfalls ein Punkt der Peripherie des Kreises, von welchem AF der Durchmesser ist. Dasselbe läßt sich vom Punkt C zeigen, mithin liegen alle Punkte A, B, C, D, E in den Umfang des Halbkreises und AF ist der Durchmesser.

Die Ordnung, in welche die Seiten in den Halbkreis eingetragen werden, ist ganz gleichgültig. Denn die Größe des Halbkreises für den Durchmesser AF ist unveränderlich, ebenso ist jedes Kreissegment, hinsichtlich seiner Größe, es mag liegen, wo es will, immer dasselbe; daher die Größe des einbeschriebenen nEcks immer dieselbe.

Zusatz 2. **Unter allen nEcken die gleiche Seiten haben, ist dasjenige ein Maximum um welches sich ein Kreis beschreiben läßt** (Fig. 208.)

Fig. 208.



Es seyen ABCDEF und abcdef zwei Vielecke von der Beschaffenheit, daß AB = ab, BC = bc, CD = cd u. s. w. und daß um ABCDEF ein Kreis beschrieben werden kann, um abcdef aber ein Kreis sich nicht beschreiben läßt. Man ziehe den Durchmesser AP, so wie CP und PD; construire über cd = CD das $\triangle$cdp $\cong \triangle$CDP und ziehe ap, so ist ABCPA > abcpa, und AFEDPA > afedpa. Denn wäre dieses nicht der Fall, so müßte sowohl abcpa, als auch afedpa in einem Halbkreise, dessen Durchmesser ap, mithin abcpdef und auch abcdef in einem Kreis einbeschrieben seyn, was gegen die Voraussetzung ist.

Es ist also auch ABCPDEF > abcpdef und weil △CDP ≌ △cdp, so ist ABCPDEF — △CDP > abcpdef — △cdp,

oder ABCDEF > abcdef.

Dieses gilt nun für jedes Vieleck abcdef, wenn dessen Seiten nicht in der Peripherie eines Kreises liegen, daher ABCDEF ein Maximum.

Zusatz 3. Mit Zuziehung des §. 209. Z. und des vorigen Zusatzes gilt nun folgender allgemeine Satz:

Unter allen nEcken von gegebenem Umfang ist der Flächenraum des regelmäßigen ein Maximum.

Zusatz 4 Es bezeichne A eine regelmäßige Figur, Q deren Flächenraum und U deren Umfang.

B sey eine unregelmäßige Figur, welche jedoch mit A gleich viele Seiten hat; der Flächenraum von B sey Q, und deren Umfang U,.

Ist in beiden Figuren Q = Q,, so muß (nach dem vorigen Zusatz) U, > U seyn.

Man nehme ferner eine dritte Figur C an, welche regelmäßig und mit A ähnlich ist und bezeichne deren Flächenraum mit Q,, und deren Umfang mit U,,, so ist, wenn U,, = U, Statt findet, offenbar Q,, > Q,. Ist nun Q = Q,, so ist auch Q,, > Q. Ferner ist A ∾ C, so muß U,, > U und wenn U,, = U,, so ist U, > U.

Unter allen Vielecken von einer gleichen Anzahl der Seiten und demselben Flächenraum ist der Umfang des regelmäßigen ein Minimum.

Zusatz 5. Es sey A eine Figur, um welche sich ein Kreis beschreiben läßt, Q sey deren Flächenraum und U deren Umfang.

K sey ein Kreis, dessen Flächenraum = Q, und dessen Peripherie = U,; auch sey Q = Q,.

Ferner sey B eine dem Kreise K umschriebene Figur, deren Flächenraum = Q,, und deren Umfang = U,,, auch sey A ∾ B.

Nun ist nach (§, 204. Z. 5).

Q, : Q,, = U, : U,,

und weil Q = Q,

so ist auch Q : Q,, = U, : U,,

Weil nun $A \backsim B$, so ist auch (§. 205).

$$Q : Q_{,,} = U^2 : U_{,,}^2$$

$$\text{daher } U_{,} : U_{,,} = U^2 : U_{,,}^2$$

$$\text{oder } U_{,} : U = U : U_{,,}$$

$$\text{und } U_{,}^2 : U^2 = U_{,} : U_{,,}$$

Nun ist immer $U_{,} < U_{,,}$, folglich auch $U_{,}^2 < U^2$ oder $U_{,} < U$ d. h.

der Umfang des Kreises ist unter allen Figuren die mit ihm gleichen Flächenraum haben ein Minimum.

Zusatz 6 Behält man genau die im §. 205 aufgestellte Bezeichnung und Beschreibung der Figuren bei, so ist

$$Q_{,,} : Q_{,} = Q_{,} : Q.$$

Es ist aber immer $A > K$ oder $Q > Q_{,}$; folglich ist auch $Q_{,} > Q_{,,}$ oder $K > B$ d. h.

der Flächenraum des Kreises ist unter allen mit ihm isoperimetrischen Vielecken ein Maximum.